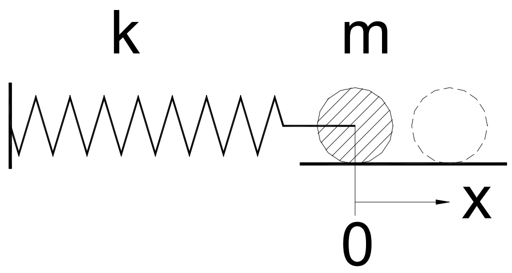
Oscillatore semplice

Vibrazioni armoniche libere o naturali



Se il corpo di massa m è spostato di x verso destra rispetto alla posizione di riposo, è soggetto alla forza elastica di richiamo della molla kx agente verso sinistra e alla forza d'inerzia $m\ddot{x}$ pure rivolta verso sinistra (se l'accelerazione è positiva). Per l'equilibrio dinamico del corpo la somma di tali forze deve essere nulla:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Si noti che se x è positiva, cioè se il corpo si muove verso destra dalla posizione di riposo, il moto è decelerato e quindi la derivata seconda $\ddot{x}$ è negativa.

$$\textit{ponendo} \quad \omega^2 = k/m \quad (\omega = \text{pulsazione})\,\text{si ha:}$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

$$\text{integrale generale}$$

$$x(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t$$

Il moto è armonico. Le costanti A e B dipendono dalle caratteristiche del moto per t=0. Se per t=0 si ha x=0, deve essere B=0. In tal caso A rappresenta l'ampiezza del moto.

$$x(t) = A\sin\omega t$$

Le condizioni del moto si ripetono se ωt cresce di 2π cioè se t cresce del $\boxed{\textbf{periodo } T=2\pi/\omega}$.

La $\boxed{\textbf{frequenza} \text{ è } \mathbf{f=1/T=\omega/(2\pi)}}$.

Come nel caso del carico di punta il carico P_{cr} è quel valore di P per il quale l'asta è in equilibrio deformato (momento esterno = momento interno), così ω è quel valore della pulsazione per la quale il corpo è in equilibrio dinamico (la forza d'inerzia fa equilibrio alla forza di richiamo della molla).

L'accelerazione vale:

$$a = \ddot{x}(t) = -A\omega^2 \sin\omega t$$

con valore massimo:

$$a_{\max} = A\omega^2 \quad \rightarrow \quad A = a_{\max}/\omega^2$$

Attenzione alle unità di misura!! Se si usano le unità del sistema SI (N, m) si deve introdurre la massa in kg. Se si usano i kN si introduce la massa in t.

Esempio:

Calcolare il periodo proprio di un'ascensore del peso di 800 kg appeso ad una fune lunga 24 m con sezione di 1,2 cm^2. Per la fune si consideri un modulo elastico E = 100 000 N/mm^2. Si trascuri il peso della fune.

La costante elastica vale:

$$k = \frac{EA}{L} = \frac{10000 \cdot 120}{24000} = 500\ N/mm^2 = 500000\ N/m$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{500000}{800}} = 25\ rad/s$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0{,}251\,\mathrm{sec} \qquad f = \frac{1}{T} = 3{,}98\ cicli/s$$

Si supponga che, mentre l'ascensore scende con velocità costante di 2 m/s, l'estremità superiore della fune (lunga 24 m) si blocchi improvvisamente. In quell'istante (t=0) si ha x=0 (l'ascensore inizia ad oscillare) e v(0)=2m/s. Si ha pertanto:

$$x(t) = A\sin\omega t$$

$$\dot{x}(t) = A\omega\cos\omega t$$

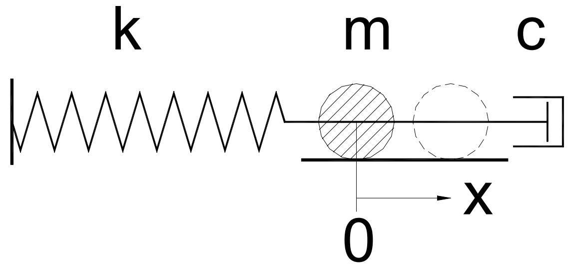
$$\dot{x}(0) = A\omega = 2 \quad \rightarrow \quad A = 2/\omega = 0{,}08\ m$$

L'ampiezza dell'oscillazione è quindi di 8 cm, che provoca un aumento di carico sulla fune:

$$\Delta F = kA = 0{,}08 \cdot 500000 = 40000\ N = 40\ kN$$

che si aggiunge al carico di 800 kg$_P$ (7848 N) cui era soggetta la fune prima dell'arresto.

Vibrazioni armoniche libere con smorzamento



Se lo smorzamento è viscoso, cioè se la resistenza è proporzionale alla velocità ($c\dot{x}$), lequazione di equilibrio dinamico diviene:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

Nella maggior parte dei casi c è abbastanza piccolo per cui si può scrivere:

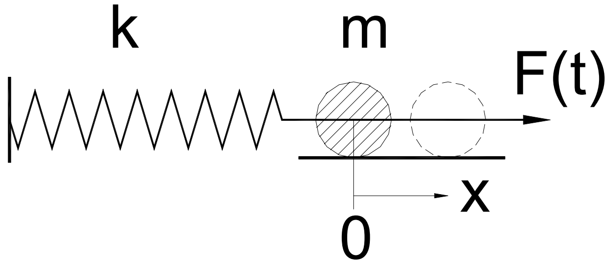
$$x(t) = e^{-(c/2m)t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$$

avendo posto:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2 \quad \text{con} \quad \omega_0^2 = k/m \quad \text{pulsazione libera}$$

Il moto è ancora armonico con ampiezza decrescente.

Vibrazioni armoniche forzate senza smorzamento



Sulla massa m agisca la forza $F = F_m \sin\omega t$. L'equazione di equilibrio dinamico diviene:

$m\ddot{x} + kx - F_m \sin\omega t = 0$ (F ha verso opposto alla forza di richiamo kx della molla)

Un integrale particolare è:

$$x = x_m \sin\omega t \quad (x_m = \text{spostamento massimo})$$

Sostituendo si ottiene:

$$-m\omega^2 x_m \sin\omega t + kx_m \sin\omega t - F_m \sin\omega t = 0$$

dalla quale si ricava l'ampiezza del moto:

$$x_m = \frac{F_m}{k - m\omega^2} = \frac{F_m}{k} \cdot \frac{1}{1-(m/k)\omega^2} = \frac{F_m/k}{1-(\omega/\omega_0)^2} = \frac{F_m/k}{1-(f/f_0)^2}$$

Lo spostamento è quidi uguale allo spostamento statico F_m/k incrementato del coefficiente dinamico

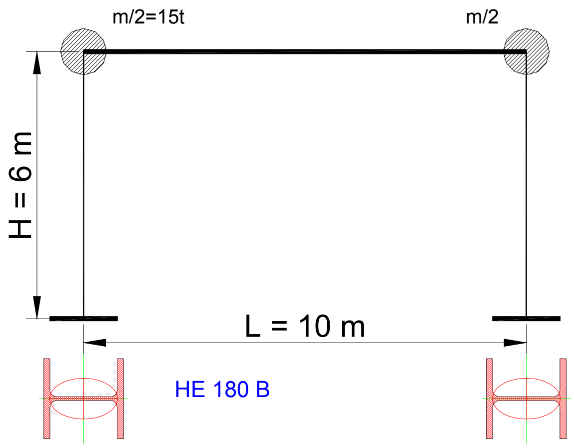
$$\frac{1}{1-(f/f_0)^2}$$

Se $f = f_0$ (risonanza) lo spostamento diviene infinito.

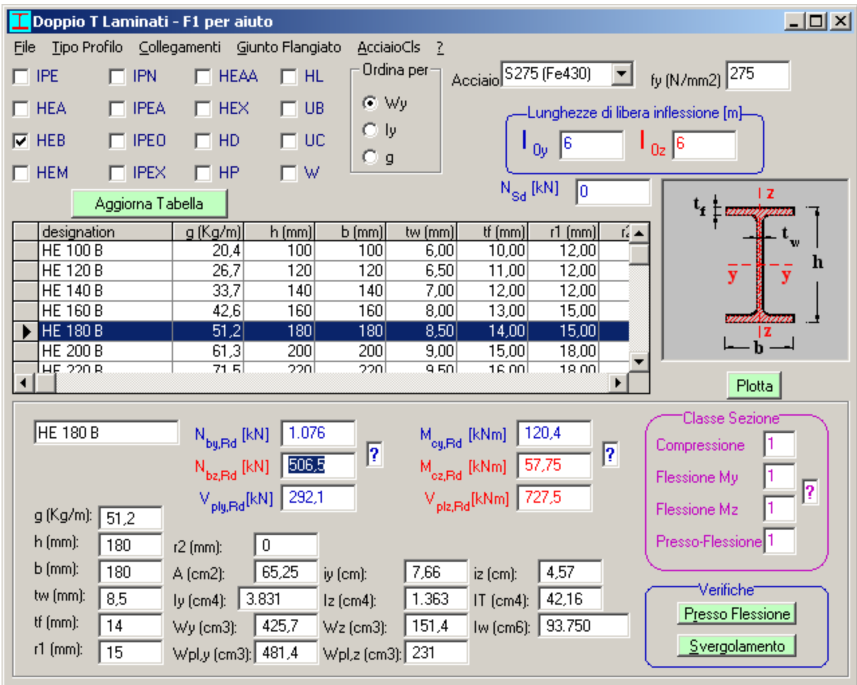
Se $f << f_0$ lo spostamento dinamico è circa uguale a quello statico: il corpo segue passivamente l'azione della forza perchè la sua inerzia, data la lentezza del moto, ha poca influenza.

Se $f > f_0$ il moto avviene in opposizione di fase. Se $f = 2 f_0$ lo spostamento dinamico è uguale a quello statico. Se $f >> f_0$ il corpo non fa in tempo ad obbedire agli impulsi della forza e resta quasi fermo.

ESEMPIO 1



Il portale di figura si ripete ogni 6 m e porta un impalcato con carico, comprensivo di peso proprio, di 5 kN/m^2. La trave è quindi soggetta al carico distribuito q=6·5=30 kN/m, di risultante Q=300 kN. La massa è quindi M=300/9,81 ≈ 30 t.
Si consideri la trave infinitamente rigida. Le colonne hanno lunghezza di libera inflessione L_0=H.
Si adotti un profilo HE 180 B.



La rigidezza alla traslazione del portale è:

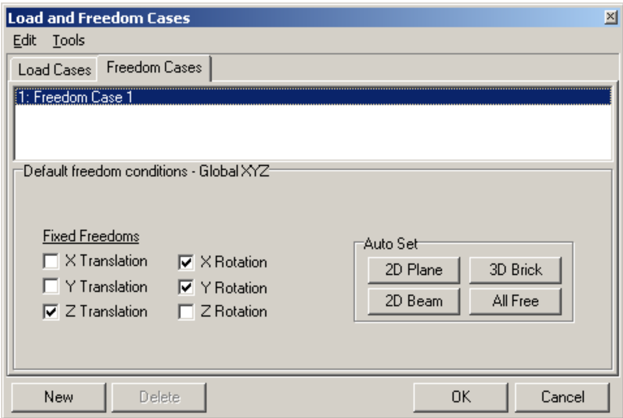
$$k = 2\frac{12EI}{H^3} = 2\frac{12 \cdot 210000 \cdot 3831 \cdot 10^4}{6000^3} = 894\ N/mm = 894\ kN/m$$

Pulsazione propria:

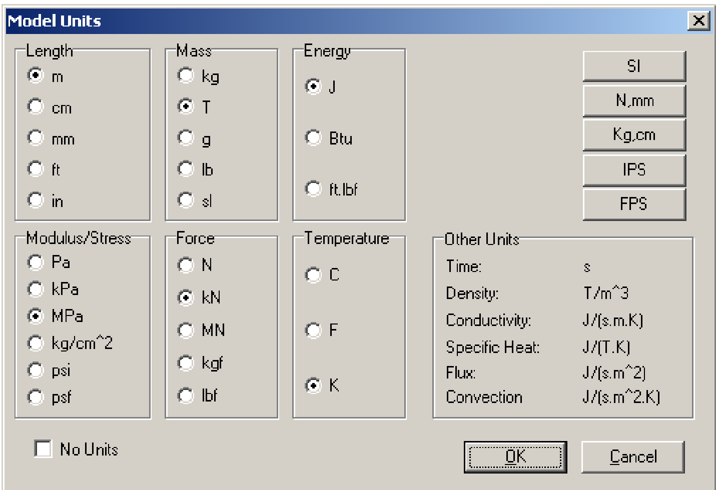
$$\omega = \sqrt{k/M} = \sqrt{894/30} = 5{,}46\ rad/s$$

Periodo: $T = 2\pi/\omega = 1{,}15\ s$ frequenza : $f = 0{,}869 s^{-1}$

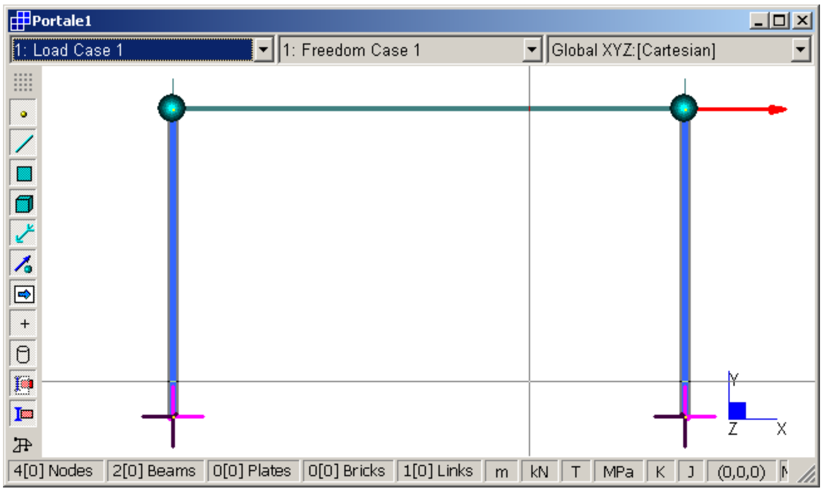
Calcolo con Straus



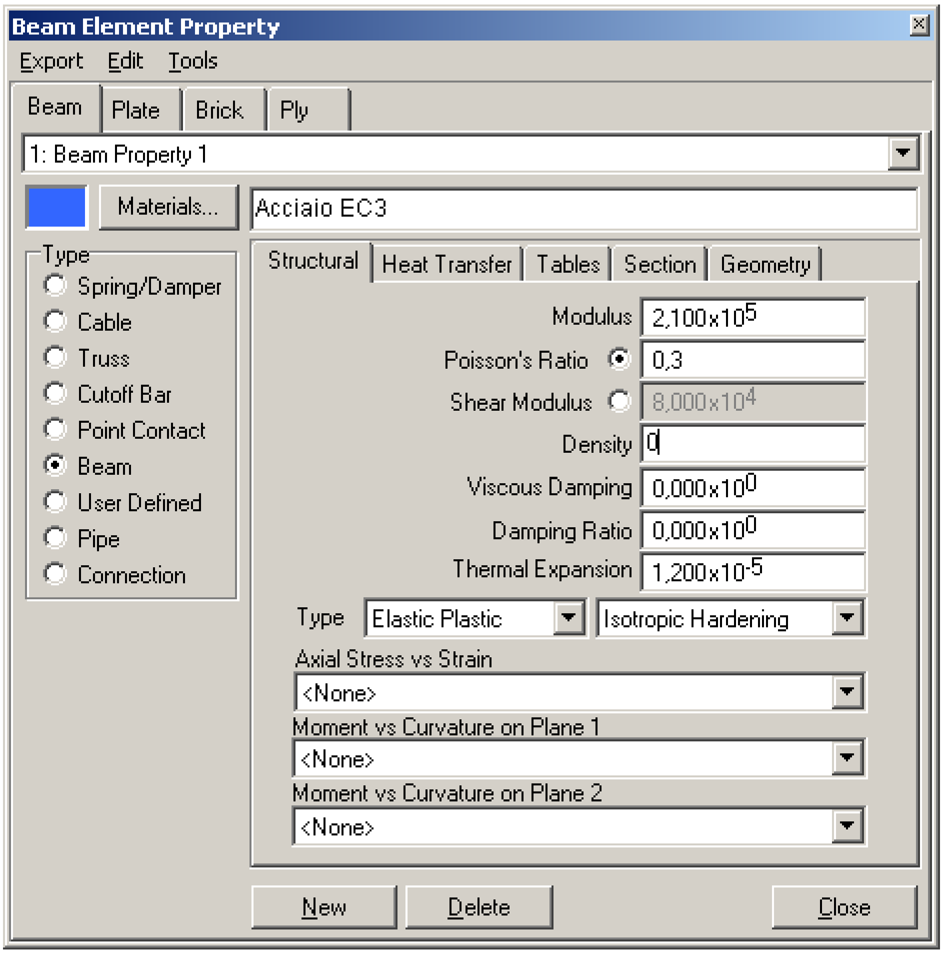
Telaio piano



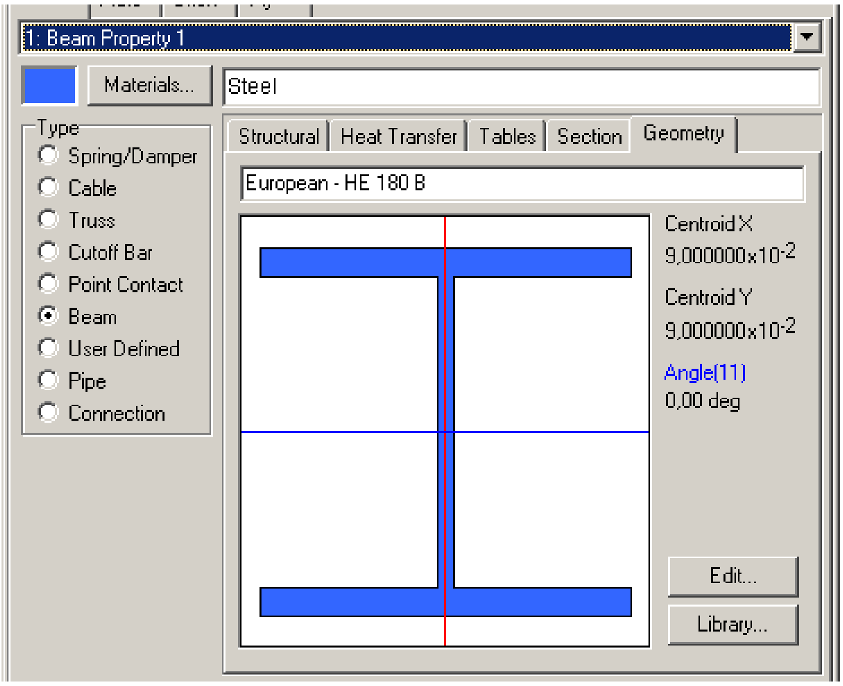
Unità di misura raccomandate



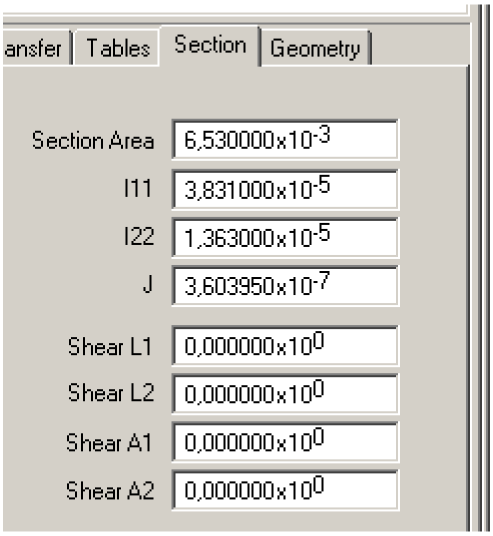
Geometria: i due HEB verticali sono collegati in sommità da un Rigid Link.
Le due masse concentrate nei nodi sono rappresentate da sfere.
Una forza orizzontale di 1000 kN è applicata per il calcolo della rigidezza.



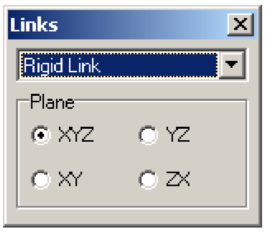
Caratteristiche del materiale: si noti che Density=0 per considerare solo le masse concentrate



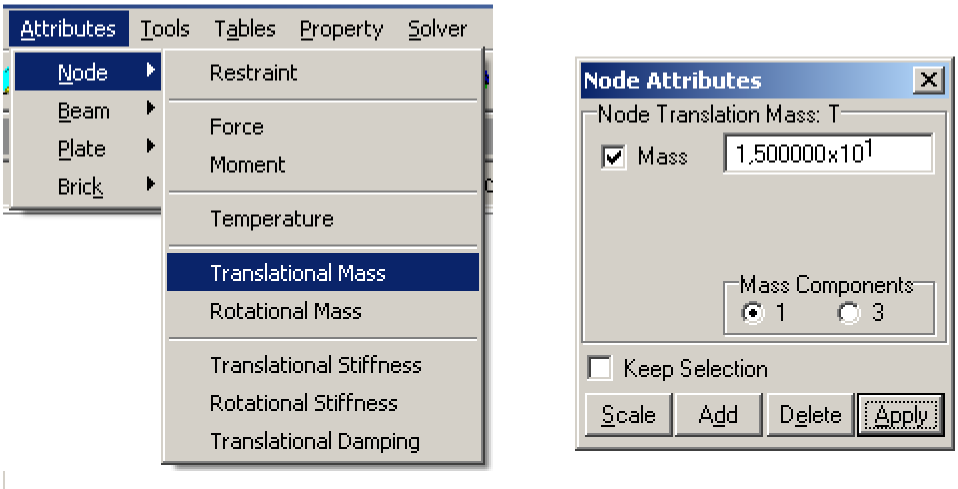
Geometria della sezione



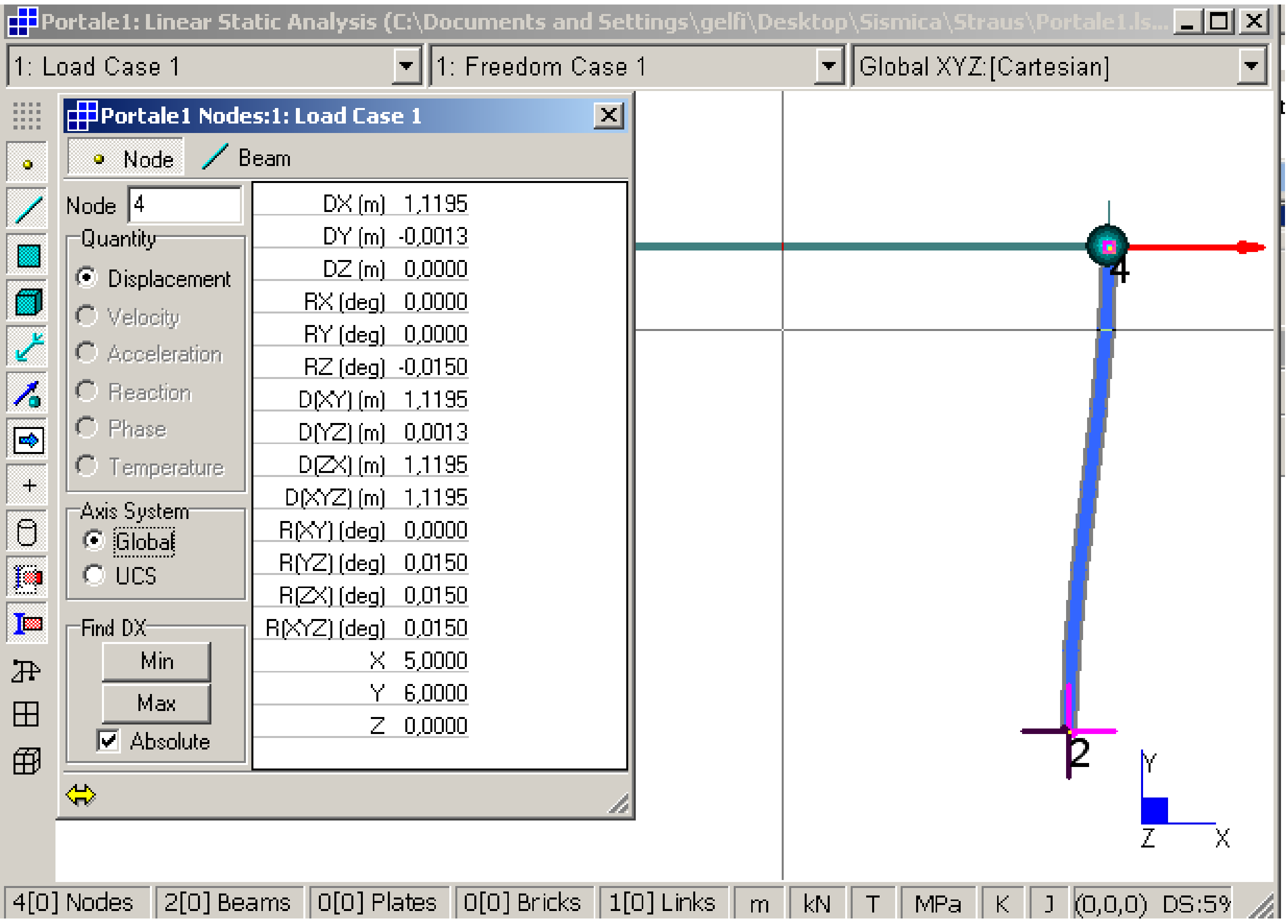
Porre Shear A1 e A2=0 per non considerare la deformabilità a taglio ed ottenere gli stessi risultati del calcolo manuale.



Rigid Link



Masse concentrate



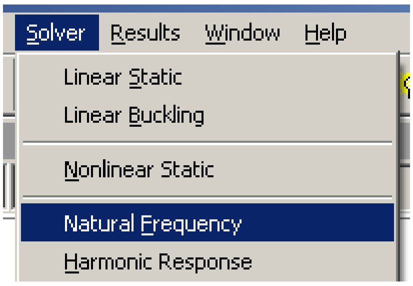
Analisi lineare statica (Linear Static)

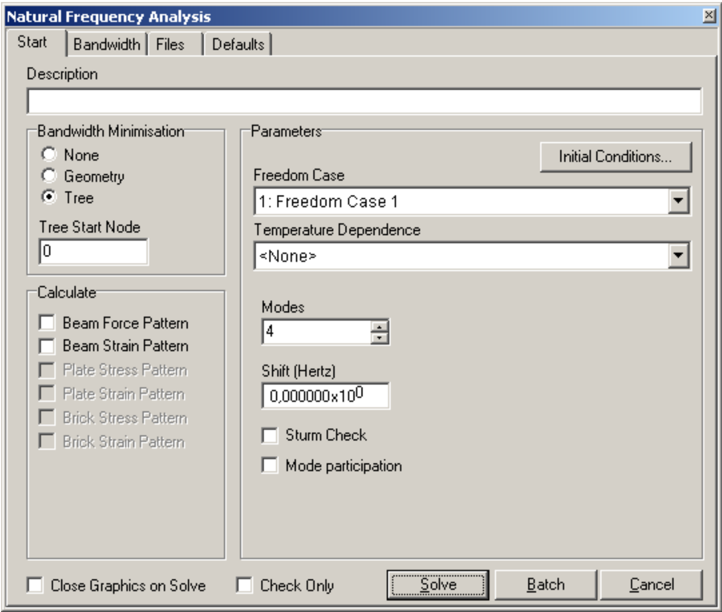
Lo spostamento provocato dalla forza di 1000 kN è di 1,1195 m. La rigidezza del portale è quindi:

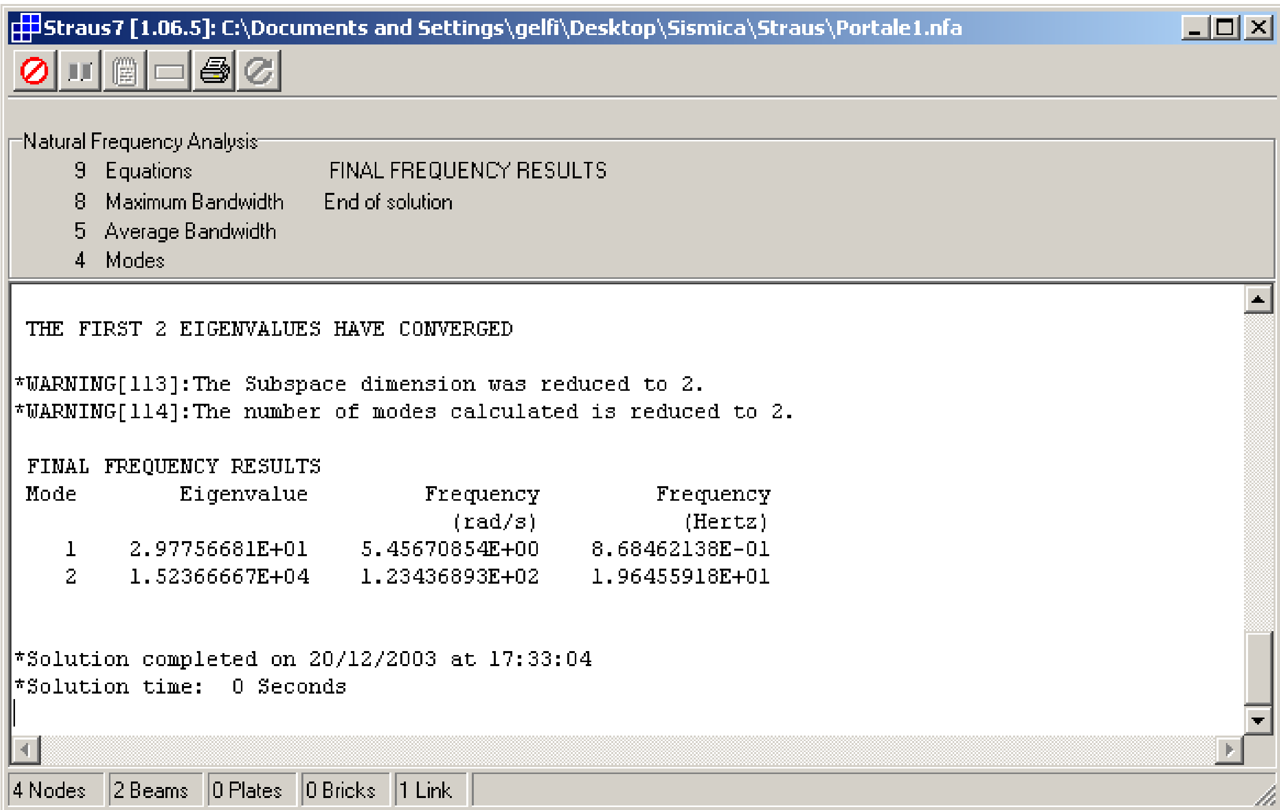
$$k = \frac{F}{DX} = \frac{1000}{1,1195} = 893\ kN/m$$

La piccolissima differenza rispetto al valore ottenuto dal calcolo manuale (k=894) è dovuta al fatto che il programma considera anche la deformabilità assiale delle colonne.

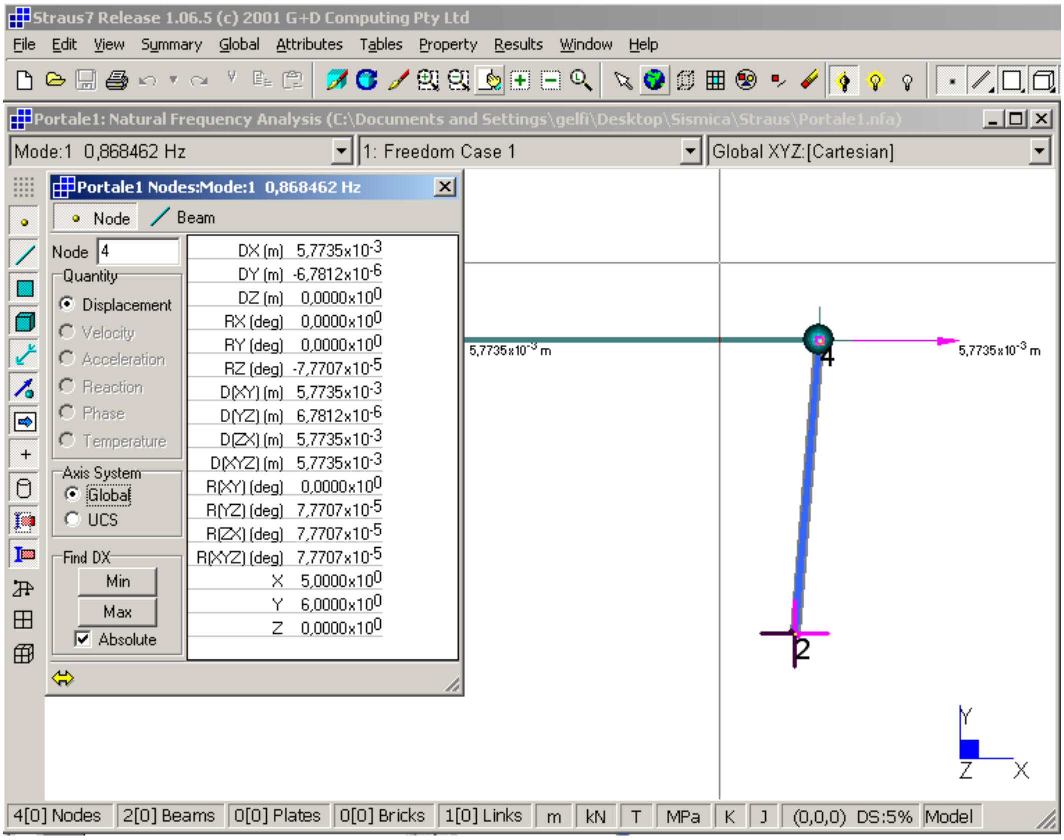
Modi propri di vibrare (Natural Frequency)







Il valore della frequenza del primo modo (5,456 rad/s) coincide col valore del calcolo manuale (5,46).



Lo spostamento (autovettore) in sommità è DX = 0,0057735. L'autovettore x è ortonormalizzato, cioè soddisfa la proprietà:

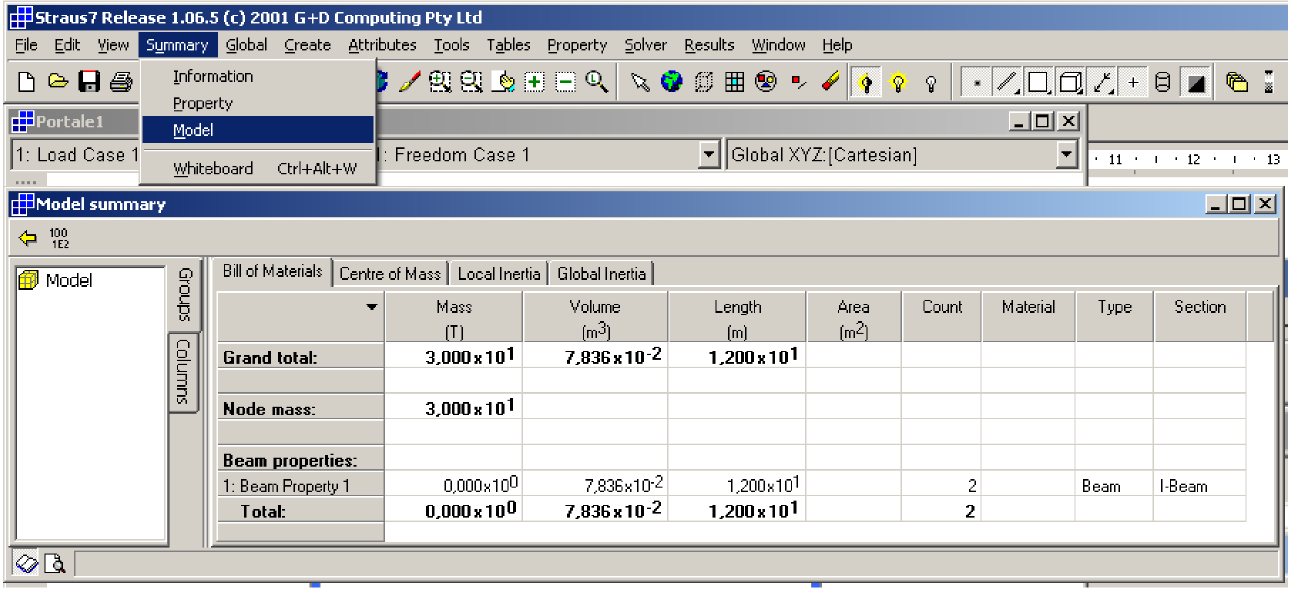
$$x^T \cdot M \cdot x = 1 \quad con\ M\ in\ kg$$

$$30000 \cdot 0{,}0057735^2 = 1$$

Il secondo modo di vibrare è assiale, con frequenza altissima e può essere ignorato.

Poichè il sistema ha solo due gradi di libertà, non si hanno altri modi di vibrare.

Le masse considerate si pssono vedere dal menu Model:



	Mass (T)	Volume (m³)	Length (m)	Area (m²)	Count	Material	Type	Section
Grand total:	$3{,}000\times10^{1}$	$7{,}836\times10^{-2}$	$1{,}200\times10^{1}$					
Node mass:	$3{,}000\times10^{1}$							
Beam properties:								
1: Beam Property 1	$0{,}000\times10^{0}$	$7{,}836\times10^{-2}$	$1{,}200\times10^{1}$		2		Beam	I-Beam
Total:	$0{,}000\times10^{0}$	$7{,}836\times10^{-2}$	$1{,}200\times10^{1}$		2			

Analisi sismica

Secondo L'Ordinanza 3274 del 20.3.2003 della Presidenza del Consiglio dei Ministri, l'azione sismica di progetto (accelerazione) $S_d(T)$, per le componenti orizzontali vale, con i parametri di Fig. 1:

$$S_d(T) = 0{,}0510 \cdot g = 0{,}0510 \cdot 9{,}81 = 0{,}5003 \text{ m/s}^2$$

La massa è cioè soggetta all'accelerazione orizzontale di 0,5003 m/s^2, ovvero ad una forza orizzontale pari al 5,1% del peso.

Il taglio totale al piede vale quindi:

$$V_d = S_d(T) \cdot M = 0{,}5003 \text{ m/s}^2 \cdot 30 \text{ t} = 15{,}00 \text{ kN} \approx 0{,}0510 \cdot Q = 0{,}0510 \cdot 300 = 15{,}3 \text{ kN}$$

(la differenza è dovuta al fatto che nel calcolo di M si è arrotondato il valore dell'accelerazione di gravità g a 10).

Lo spostamento massimo sarà:

$$DX = V_d/k = 15{,}00/893 = 0{,}0168 \text{ m}$$

oppure: $$DX = S_d / \omega^2 = 0{,}5003/5{,}46^2 = 0{,}0168 \text{ m}$$

Ciascuna colonna è quindi soggetta alle seguenti azioni interne dovute al sisma:

taglio	$V_1 = 7{,}50$ kN
momento	$M_1 = 7{,}50 \cdot 3 = 22{,}5$ kNm
az. assiale	$N_1 = V_d \cdot (H/2)/L = 4{,}5$ kN

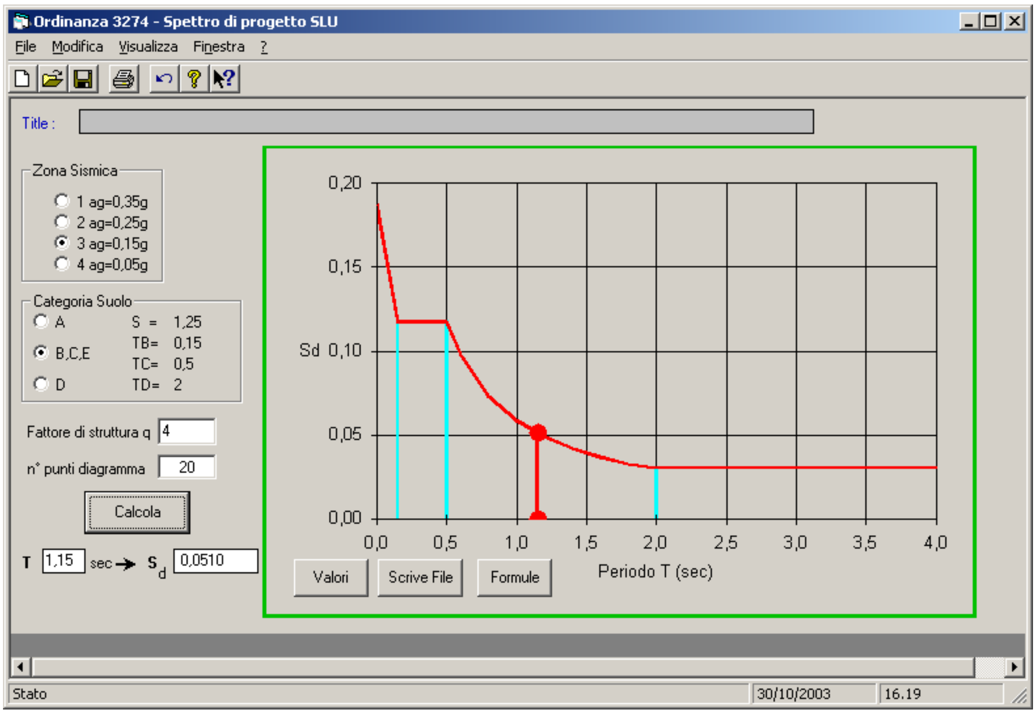
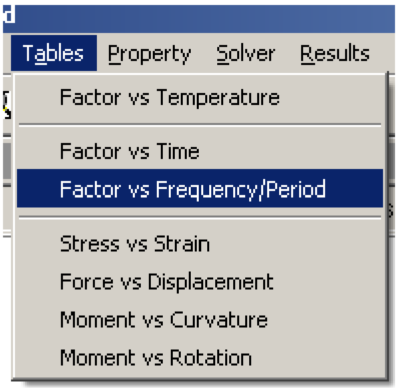


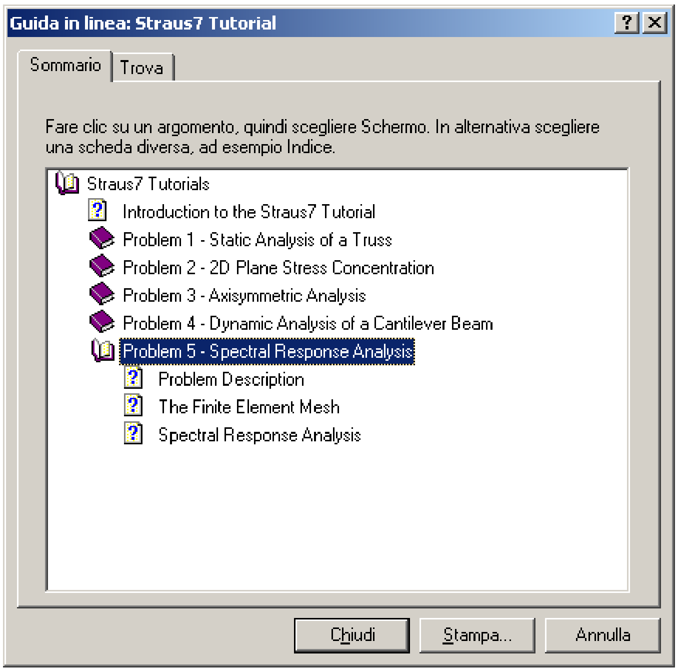
Fig. 1 – Spettro di progetto secondo Ordinanza 3274 del 20.3.2003

Calcolo con Straus

Si introduce lo spettro di progetto:



Si introducono i valori di T e S_d a mano o importandoli da file o con l'editor di equazioni (vedi l'Help in linea):



Help

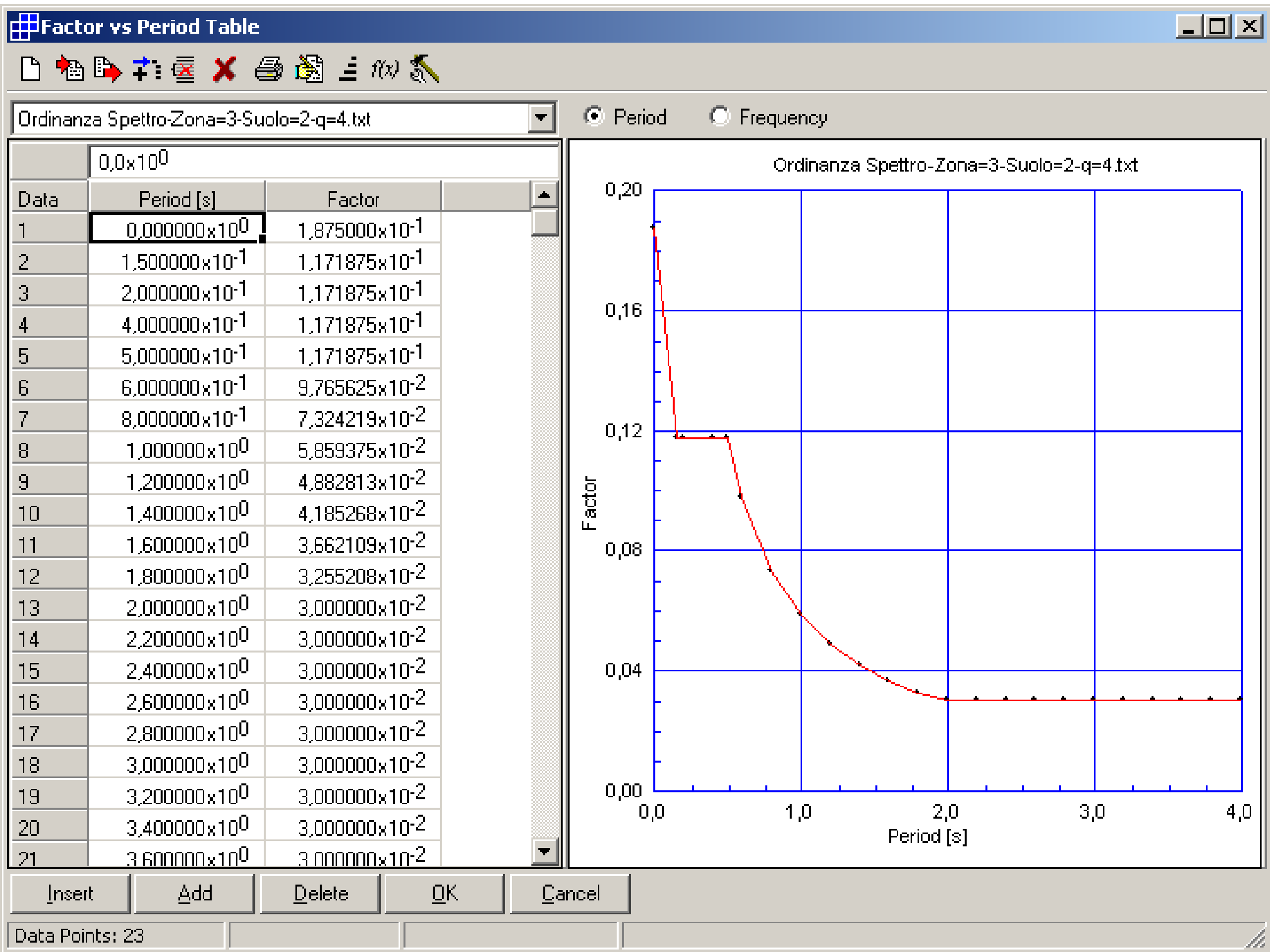
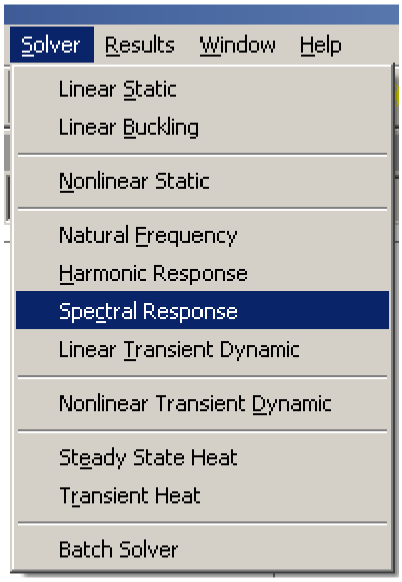
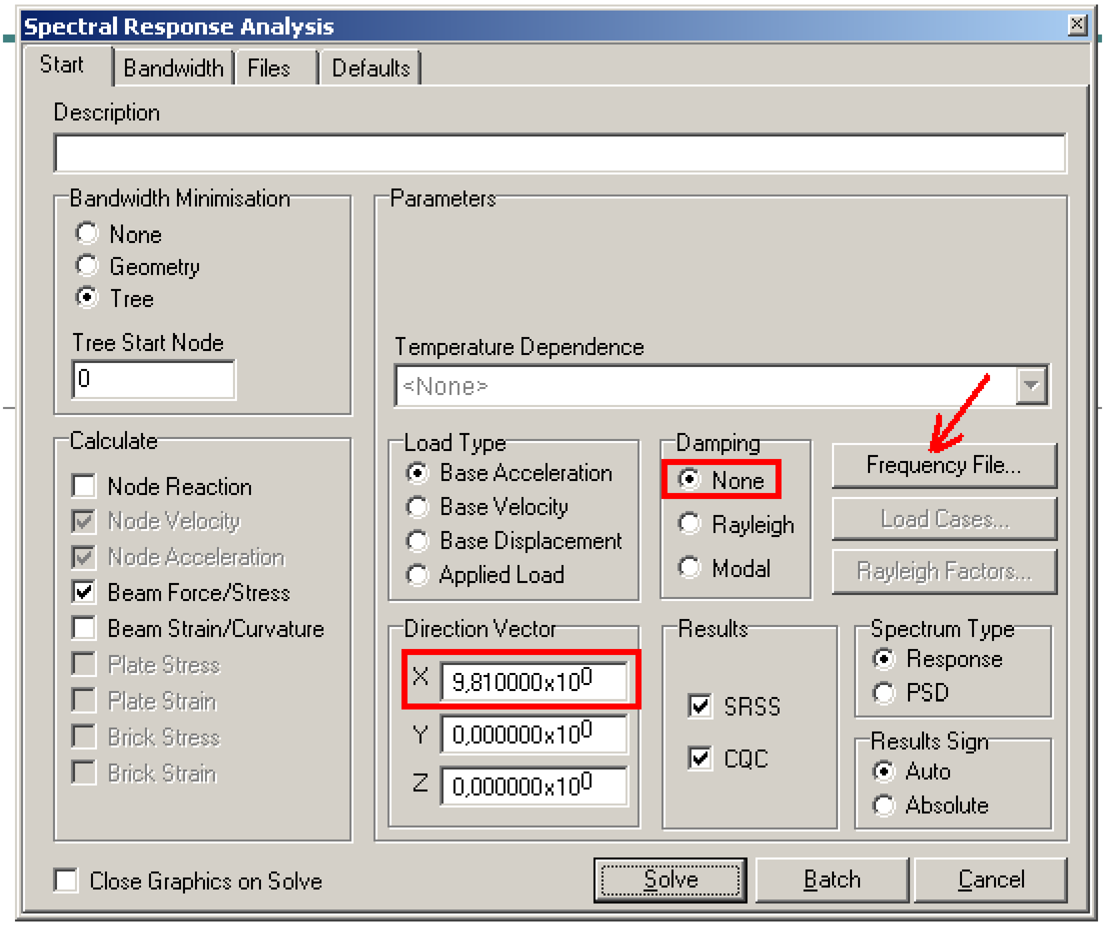


Tabella dello spettro di progetto

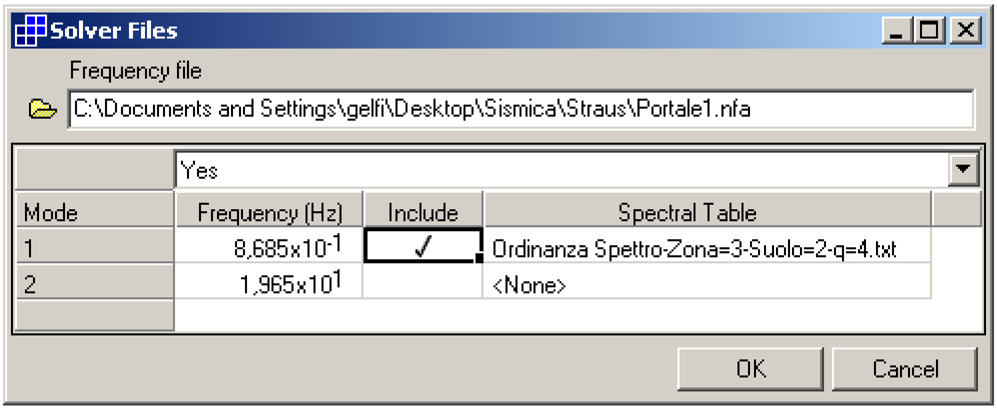
Si lancia il solutore Spectral Response:





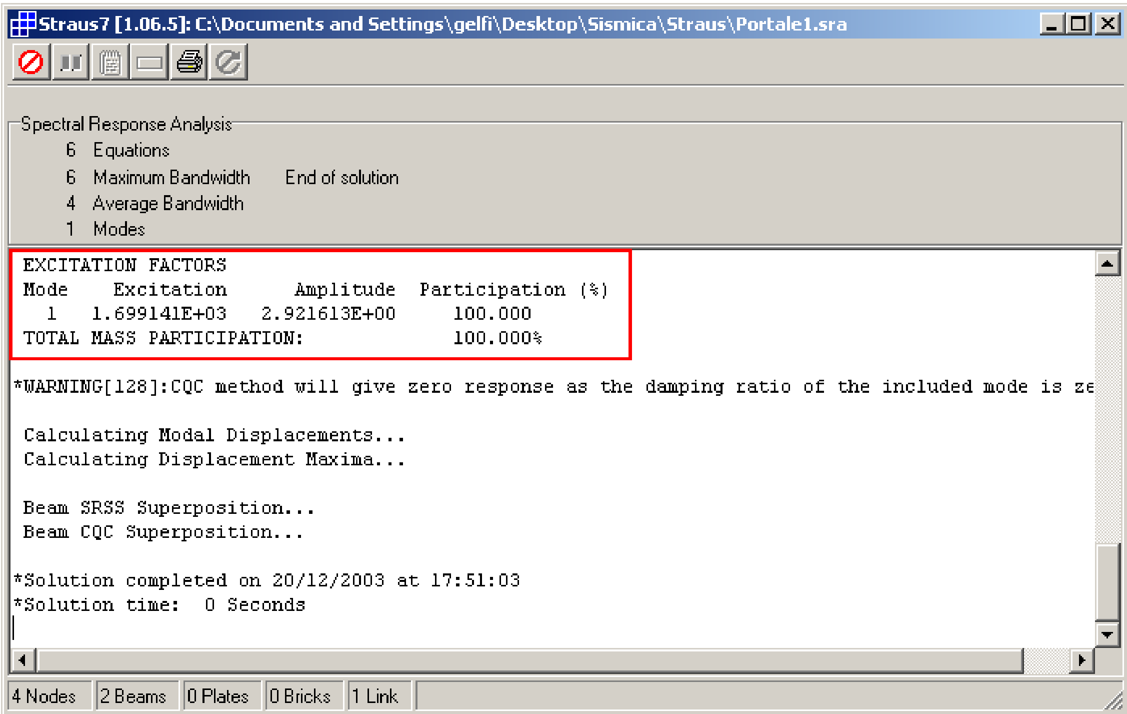
Si setta Damping (smorzamento) su None e si introduce il moltiplicatore di S_d nelle tre direzioni.

Si apre Frequency File:



Si selezionano i modi da includere (doppio click nella colonna Include) e si sceglie la tabella contenente lo spettro. Click su OK.

Click su Solve.

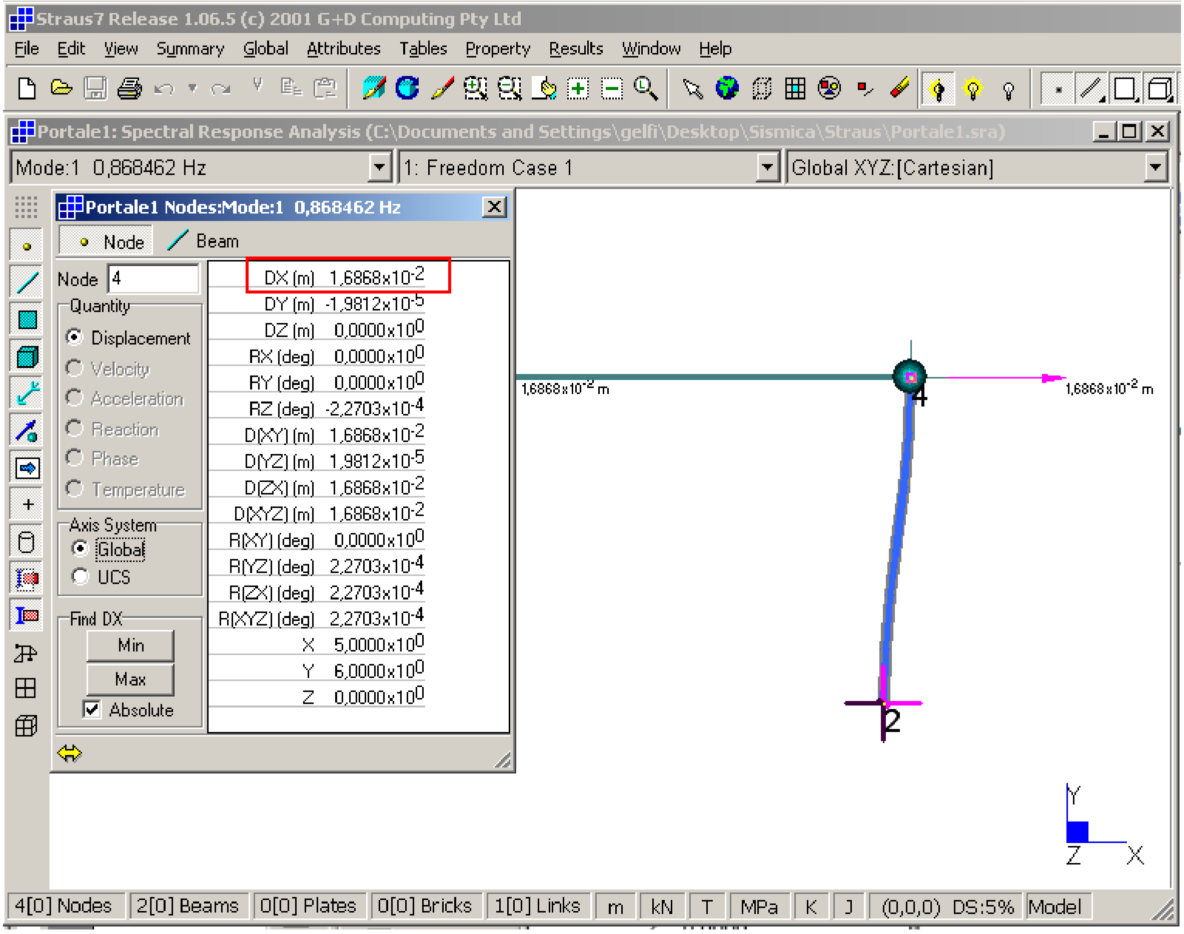


Si controlla che il fattore di partecipazione sia > 85%.

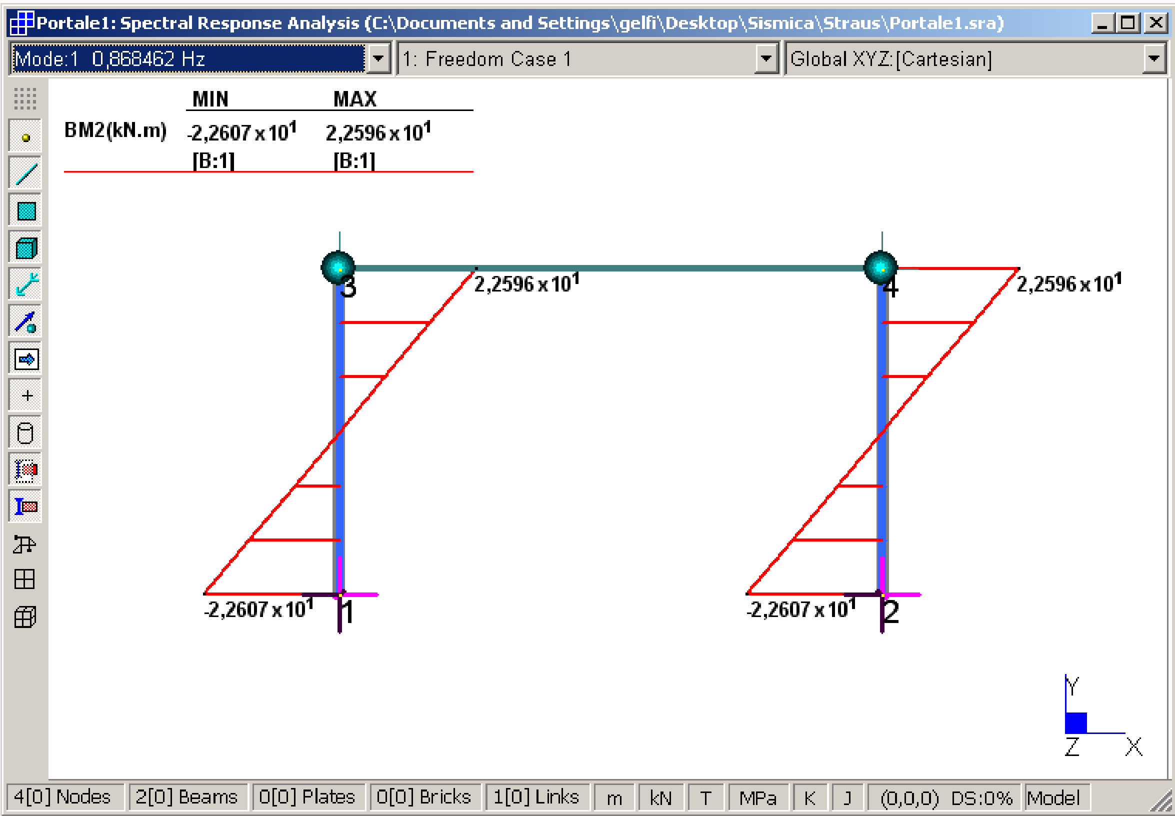
Amplitude = 2,921 è il fattore per il quale moltiplicare gli spostamenti ottenuti dall'analisi modale (Natural Frequency) DX=0,00577735 per ottenere lo spostamento spettrale:

$$DX = 0{,}0057735 \cdot 2{,}92161 = 0{,}01687 \text{ m}$$

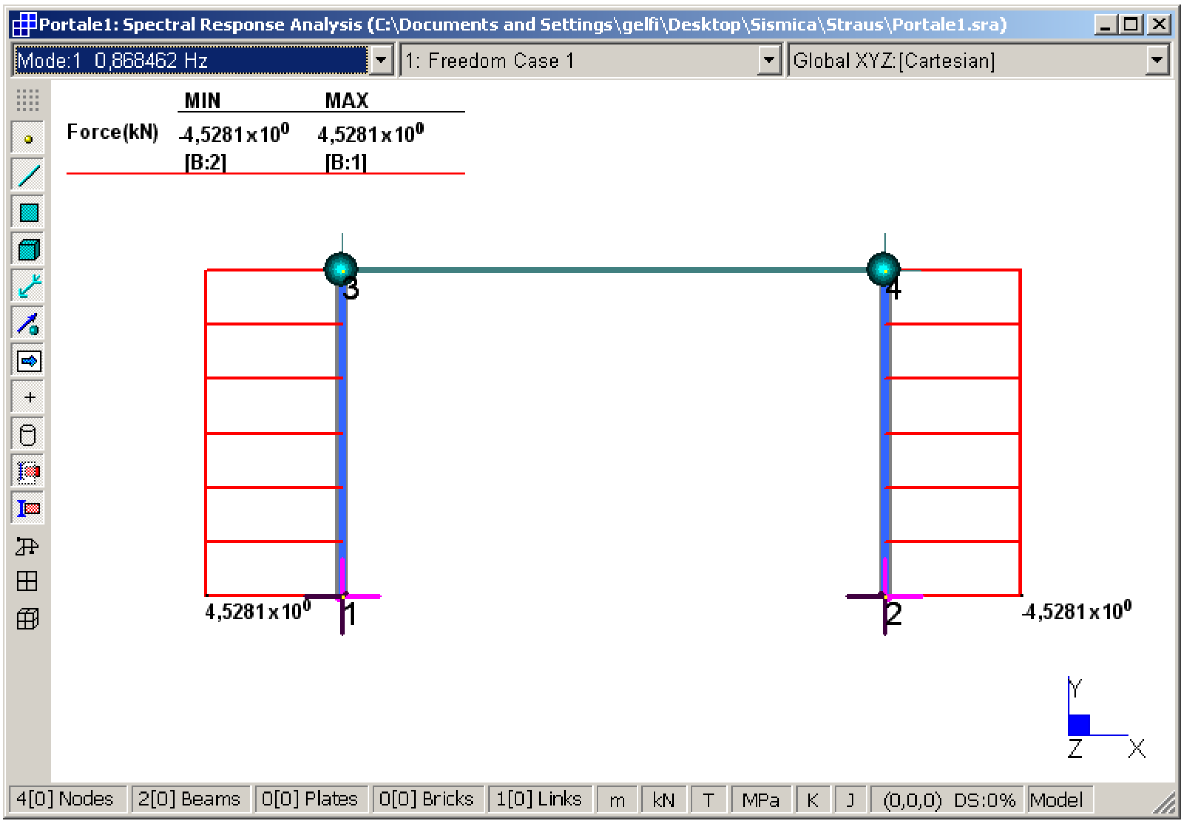
che coincide col valore del calcolo manuale.



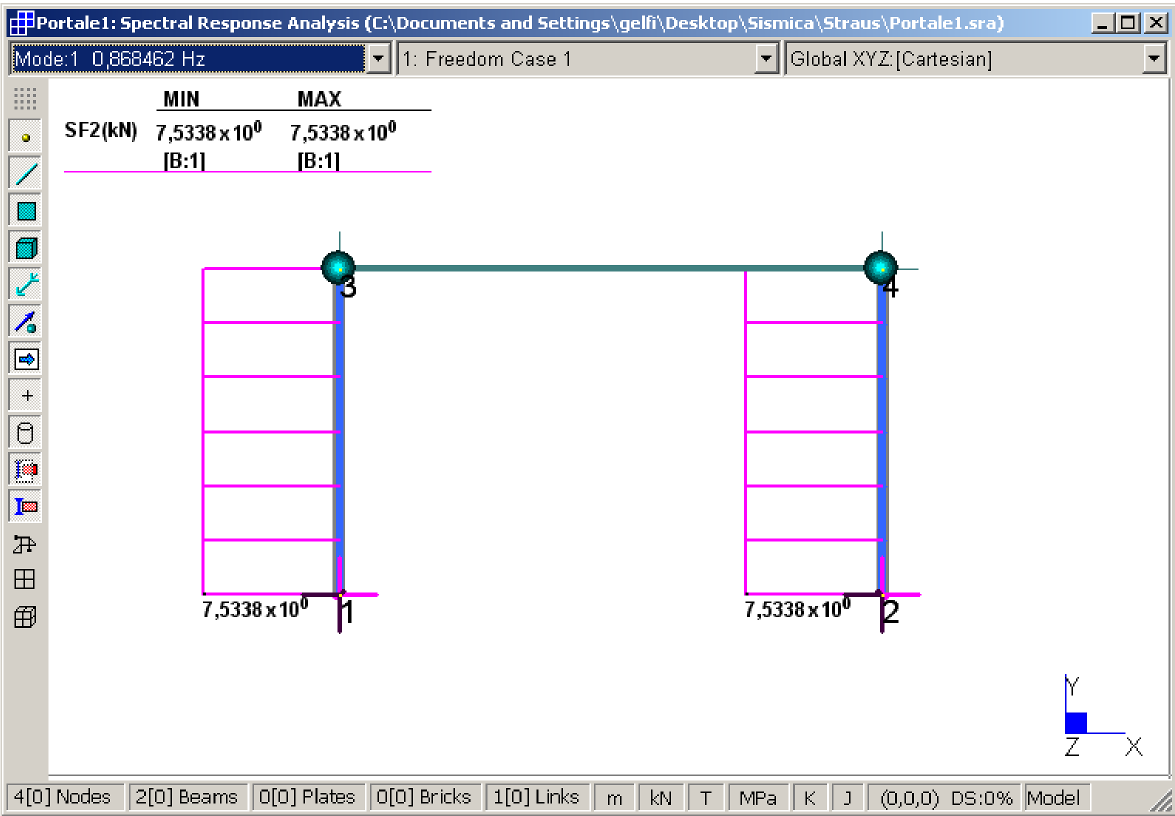
Spostamento nodo 4



Momento flettente



Azione assiale



Taglio