

9.5 L'asta nella struttura

I vincoli non sono perfetti

I vincoli non sono immutabili (cerniere plastiche)

Schematizzazioni sempre più raffinate che però non sono ancora in grado di rendere indiscutibili le scelte di progetto.

E' necessario il buon senso ingegneristico, guidato da criteri e metodi di calcolo approssimati ormai consolidati, che riguardano essenzialmente la determinazione della lunghezza di libera inflessione e della rigidezza e della resistenza richieste ai vincoli.

- Lunghezza di libera inflessione → snellezza equivalente, calcolo elastico o esame del meccanismo di collasso (metodi validi per telai a nodi fissi, discutibili per telai a nodi spostabili).
- Rigidezza e resistenza dei vincoli → determinazione difficile. In campo elastico, per aste senza imperfezioni, si può determinare la rigidezza richiesta al vincolo, ma non la resistenza che deve avere. Per determinare la resistenza è necessario fare una valutazione delle imperfezioni.

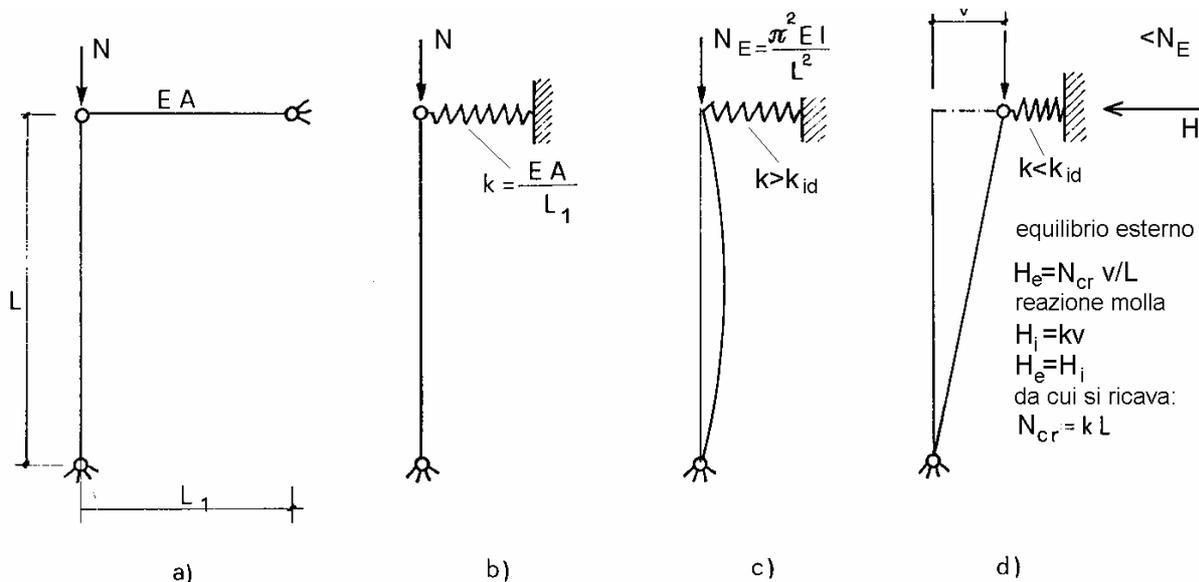


Fig. 9.116

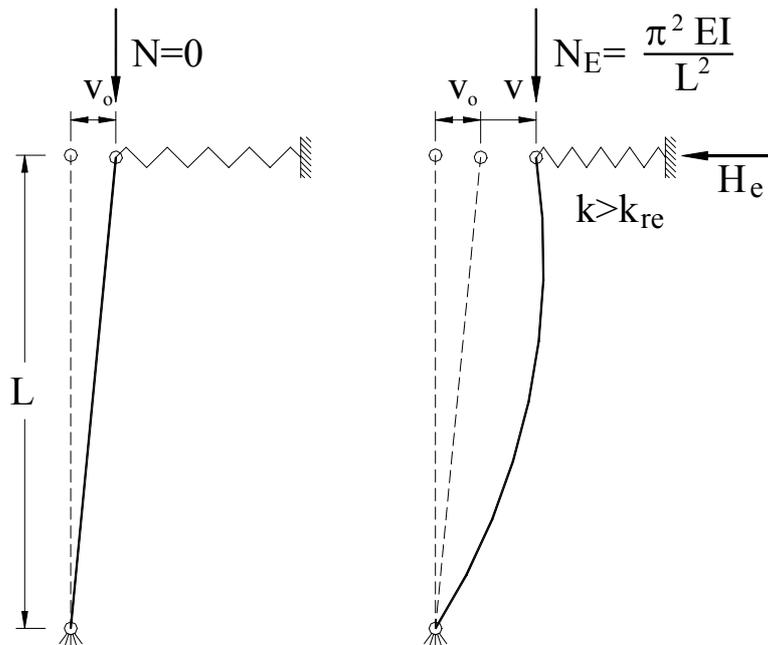
L'asta verticale di Fig. a) ha un vincolo elastico come in Fig. b). Se vogliamo che il vincolo elastico si comporti come un vincolo rigido, cioè sia pienamente efficiente (“full bracing”) come in Fig. c), non deve instaurarsi l'instabilità di Fig. d).

La rigidezza k deve quindi avere un valore superiore a:

$$k \geq k_{id} = \frac{N_E}{L} = \frac{\pi^2 EI}{L^3}$$

Chiameremo k_{id} la rigidezza, nel caso ideale di asta perfettamente verticale, richiesta al vincolo elastico perché questo sia equivalente, dal punto di vista del carico critico, ad un vincolo rigido, cioè permetta alla struttura di raggiungere il carico critico euleriano dell'asta incernierata.

Se è presente fin dall'inizio l'imperfezione v_0 :



il raggiungimento del carico critico N_E comporta la deformazione v della molla. Per l'equilibrio deve essere:

$$\frac{N_E (v_0 + v)}{L} = kv$$

$$k \geq k_{re} = \frac{N_E}{L} \frac{v_0 + v}{v} = k_{id} \frac{v_0 + v}{v}$$

La rigidezza k_{re} richiesta al vincolo di un'asta reale è quindi maggiore di k_{id} , tanto maggiore quanto minore si vuole v rispetto a v_0 (per $v \rightarrow 0$ $k_{re} \rightarrow \infty$).

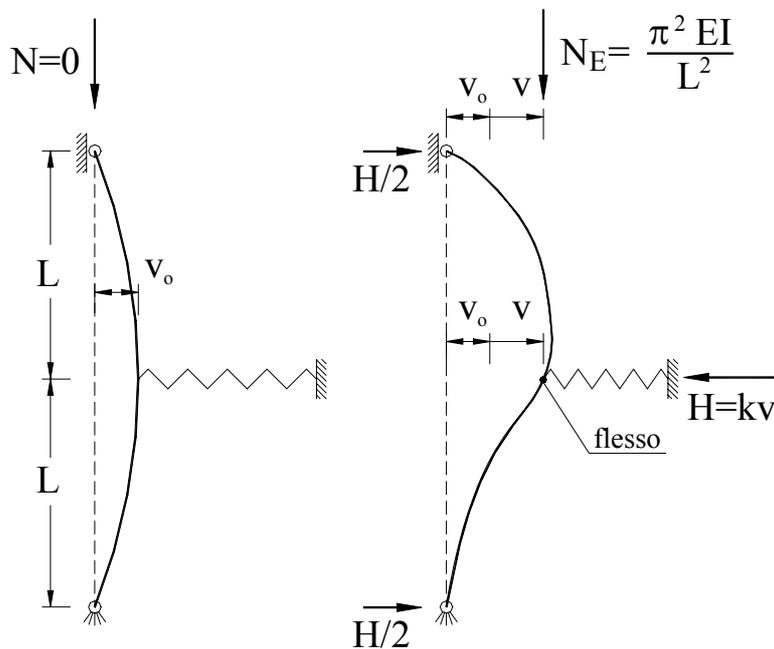
Vari autori ritengono “ragionevole” un vincolo che permetta uno spostamento $v=v_0$:

$$k_{re} = 2k_{id} = 2 \frac{N_E}{L}$$

Con questa ipotesi il vincolo è soggetto alla reazione:

$$H = kv = kv_0 = 2 \frac{N_E}{L} v_0 = \frac{N_E}{L/(2v_0)}$$

2° CASO



Per l'equilibrio alla rotazione intorno alla cerniera (punto di flesso) si ha:

$$N_E (v + v_0) = \frac{H}{2} L$$

$$2 \frac{N_E (v + v_0)}{L} = kv$$

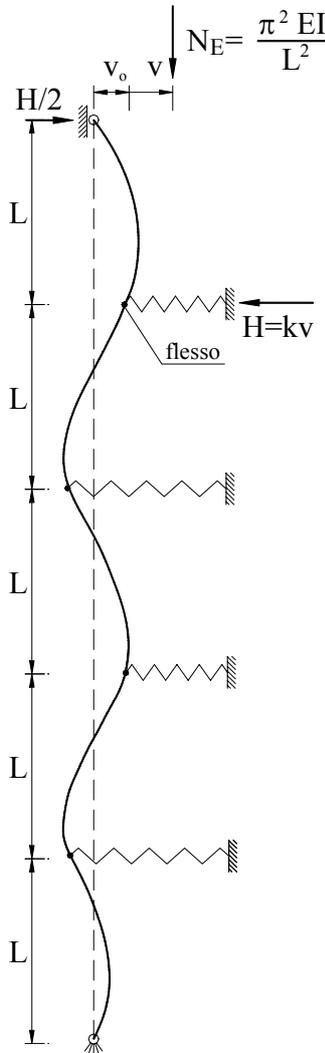
$$k = \frac{2N_E}{L} \frac{v + v_0}{v} = k_{id} \frac{v + v_0}{v}$$

Se si ammette $v=v_0$ è richiesta la rigidezza:

$$k_{re} = 2k_{id} = 4 \frac{N_E}{L}$$

CASO GENERALE

In generale, per un'asta con numerosi ritegni elastici intermedi e per $v=v_0$, si ha:



$$N_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

$$k_{id} = \frac{4N_E}{L}$$

$$kre = \frac{8N_E}{L}$$

$$H = \frac{N_E}{L/(8v_0)}$$

La normativa italiana (CNR-UNI 10011) e l'eurocodice considerano una tolleranza di rettilineità $v_0=L/1000$. Si ha quindi:

$$H = \frac{N_E}{1000/8} = \frac{N_E}{125} \cong \frac{N_E}{100}$$

valore di riferimento per molte normative.

Questo valore è indicato dalle CNR 10011/85 §7.2.7.3 per $\beta=1$, corrispondente all'ipotesi di "full bracing", cioè di $N_{cr}=N_E$. Se si sfruttano meno i vincoli, cioè se si progetta

l'asta per un carico critico inferiore ad N_E , si ha $\beta>1$ e la reazione nei vincoli diminuisce: $H=N_{max}/(100\beta)$.

EUROCODICE 3

L'Eurocodice 3 introduce criteri più razionali e generali per la verifica di stabilità delle strutture ed in particolare dei controventi, attraverso l'introduzione delle "imperfezioni geometriche equivalenti".

5.2.4.3. Imperfezioni del telaio

(1) Gli effetti delle imperfezioni devono essere considerati nella analisi del telaio attraverso una imperfezione geometrica equivalente sotto forma di una imperfezione laterale iniziale ϕ determinata dalla relazione:

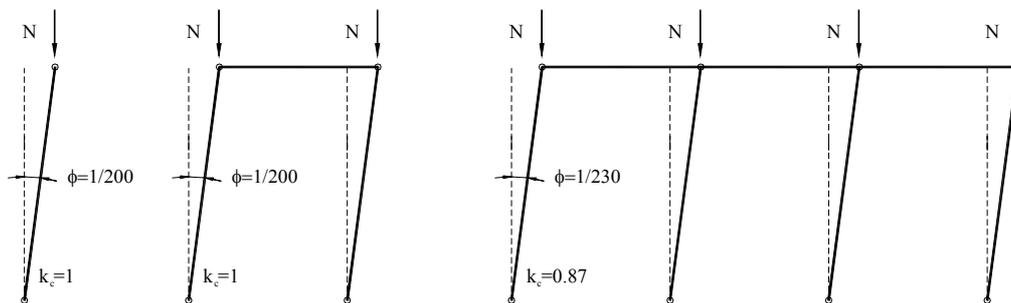
$$\phi = k_c k_s \phi_0$$

con $\phi_0 = 1/200$

$k_c = [0,5 + 1/n_c]^{1/2}$ con la limitazione $k_c < 1,0$

e $k_s = [0,2 + 1/n_s]^{1/2}$ con la limitazione $k_s < 1,0$

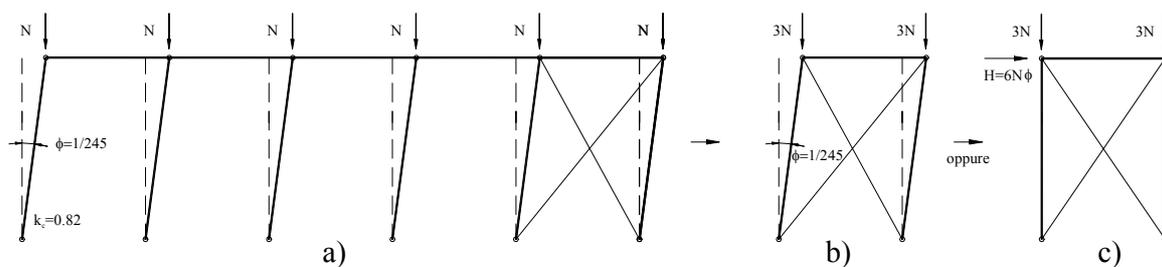
dove: n_c è il numero delle colonne per piano; .
 n_s è il numero di piani; .



L'imperfezione decresce, per ragioni statistiche, all'aumentare del numero di colonne e di piani.

Ad esempio il controvento longitudinale di figura di un capannone con sei campate e schema pendolare va verificato per la forza orizzontale H:

$$H = 6N\phi = \frac{N}{41} \quad \text{essendo: } k_c = 0.82 \quad \phi = 1/245$$



Per il calcolo delle sollecitazioni nelle diagonali si può ricorrere per comodità allo schema b) o allo schema c) (si noti che le colonne del controvento vanno verificate per l'azione N come aste incernierate). In ogni caso si deve eseguire un'analisi del secondo ordine. Un errore non infrequente è quello di calcolare le azioni nelle diagonali con un'analisi del primo ordine e di realizzare le diagonali con semplici tiranti, a volte addirittura in acciaio armonico, rischiando il collasso per spostamento laterale.

Il calcolo del primo ordine è ammissibile solo se il telaio può essere considerato a nodi fissi, il che avviene, secondo EC3, se il moltiplicatore critico delle azioni assiali è maggiore di 10.

5.2.5.2. Classificazione dei telai come telai a nodi spostabili e a nodi fissi

- (1) Un telaio può essere classificato a nodi fissi se la sua risposta a forze orizzontali nel piano è sufficientemente rigida da poter trascurare, con accettabile approssimazione, le forze o i momenti addizionali interni provenienti dagli spostamenti orizzontali dei suoi nodi.
- (2) Ogni altro telaio deve essere trattato come telaio a nodi spostabili e gli effetti degli spostamenti orizzontali dei suoi nodi devono essere considerati nel suo progetto (vedere 5.2.1.2).
- (3) *Un telaio può essere considerato quale telaio a nodi fissi, per una certa condizione di carico, se il rapporto rispetto al carico critico V_{Sd}/V_{cr} per quella condizione di carico soddisfa il criterio:*

$$V_{Sd}/V_{cr} \leq 0,1 \quad [5.5]$$

dove: V_{Sd} è il valore di progetto del carico verticale totale;

V_{cr} è il suo valore critico elastico di collasso per spostamento laterale.

5.2.5.3. Classificazione dei telai come controventati e non controventati

- (1) Un telaio può essere classificato come controventato se la sua resistenza agli spostamenti laterali è fornita da un sistema di controvento con una risposta ai carichi orizzontali nel piano che sia sufficientemente rigida da assumere, con accettabile precisione, che tutti i carichi orizzontali sono assorbiti dal sistema di controvento.
- (2) *Un telaio in acciaio può essere trattato come controventato se il sistema di controvento riduce i suoi spostamenti orizzontali di almeno 80%.*
- (3) Un telaio controventato può essere considerato come un telaio a nodi fissi.
- (4) Gli effetti delle imperfezioni laterali iniziali (vedere 5.2.4.3) nel telaio controventato devono essere presi in considerazione nel calcolo del sistema di controvento.
- (5) *Le imperfezioni laterali iniziali (o le forze orizzontali equivalenti: vedere 5.2.4.3), più eventuali forze orizzontali applicate al telaio controventato, possono essere considerate quale agenti solo sul sistema di controvento.*
- (6) *Si raccomanda di progettare il sistema di controvento perché esso resista:*
 - a qualunque carico orizzontale applicato ai telai che esso controventa;
 - a qualunque carico orizzontale o verticale applicato direttamente al sistema di controvento;
 - agli effetti delle imperfezioni laterali iniziali (o alle forze orizzontali equivalenti) derivanti dallo stesso sistema di controvento e da tutti i telai che esso controventa.
- (7) *Quando il sistema di controvento è un telaio o una sotto-struttura a telaio, esso stesso può essere un telaio a nodi spostabili o a nodi fissi (vedere 5.2.5.2).*

CONTROVENTI DI FALDA

5.2.4.4. Imperfezioni per l'analisi dei sistemi di controvento

- (1) Nel calcolo dei sistemi di controvento, ai quali è richiesto di assicurare la stabilità laterale fra le estremità delle travi o delle membrature compresse, devono essere tenuti in considerazione gli effetti delle imperfezioni attraverso una imperfezione geometrica equivalente delle membrature da vincolare, sotto forma di una imperfezione di freccia iniziale:

$$e_0 = k_r L/500 \quad [5.3]$$

dove: L è la luce del sistema di controvento;
 $k_r = [0,2 + 1/n_r]^{1/2}$ con la limitazione $k_r \leq 1,0$ nel quale n_r è il numero delle membrature da vincolare.

- (2) Per comodità, l'imperfezione di freccia iniziale delle membrature da vincolare attraverso un sistema di controvento può essere sostituita dalla forza stabilizzante equivalente mostrata nella fig. 5.2.5.

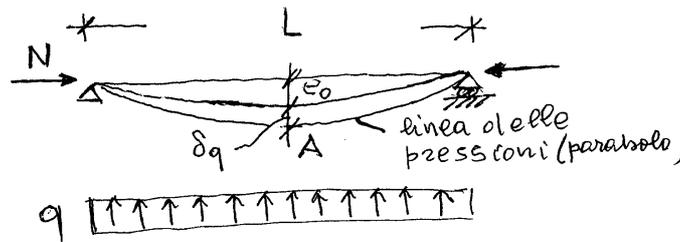
- (3) Qualora il sistema di controvento sia impiegato per stabilizzare una trave, si raccomanda di ricavare la forza N nella fig. 5.2.5 tramite la formula:

$$N = M/h \quad [5.4]$$

dove: M è il momento massimo della trave;
 h è l'altezza totale della trave.

- (4) In corrispondenza dei punti dove le travi o le membrature compresse sono discontinue, si deve anche verificare che il sistema di controvento sia in grado di resistere ad una forza locale addizionale pari a $k_r N/100$ applicata ad esso attraverso ciascuna trave o membratura compressa e di trasmettere questa forza ai punti adiacenti ai quali la trave o la membratura compressa è vincolata (vedere fig. 5.2.6).
- (5) Nella verifica per questa forza locale devono essere inoltre incluse le eventuali forze esterne agenti sul sistema di controvento, ma possono essere omesse le forze derivanti dalla imperfezione indicata in (1).

Equivalenza fra q ed e_0



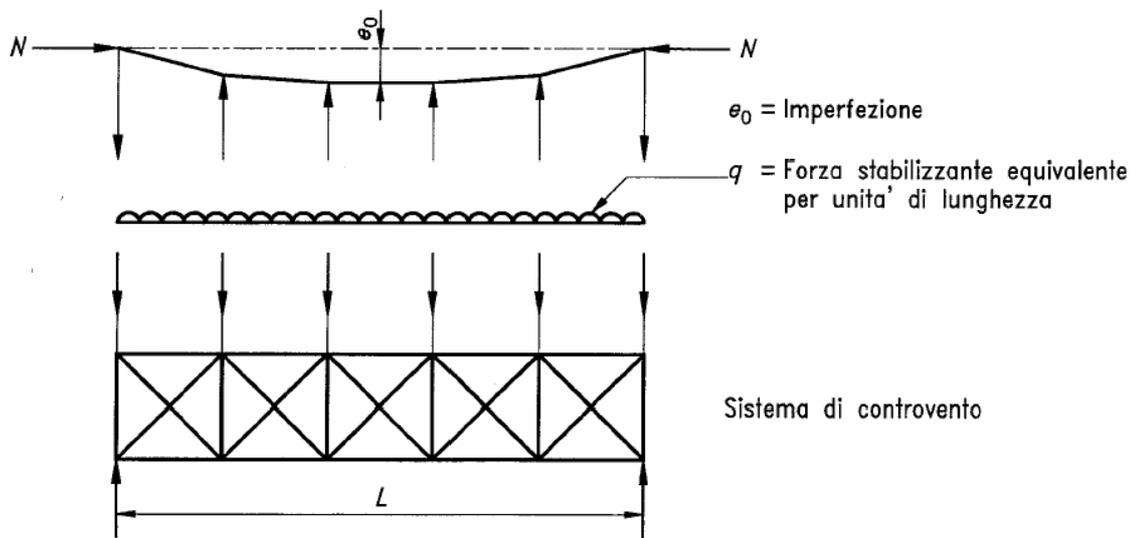
Equilibrio alla rotazione intorno ad A:

$$M_A = N(e_0 + \delta_q) - \frac{qL^2}{8} = 0 \quad \rightarrow \quad q = \frac{N(e_0 + \delta_q)}{L^2/8}$$

Se l'imperfezione iniziale $e_0 = L/500$ si incrementa per effetto di N di $\delta_q = L/2500$ si avrà una freccia totale $e_{02} = e_0 + \delta_q = L/416 \cong L/400$.

Pertanto si ha:

$$q = \frac{Ne_{02}}{L^2/8} = \frac{N}{L400/8} = \frac{N}{50}$$



La forza N è assunta uniforme all'interno della L del sistema di controvento. Qualora la forza non sia uniforme questa è una ipotesi lievemente conservativa.

Per una membratura con vincolo semplice: *sola membratura da vincolare*

$$q = \frac{N}{50L} \quad \text{purché} \quad \delta_q \leq \frac{L}{2500}$$

dove: δ_q è lo spostamento nel piano del sistema di controvento dovuto a q più eventuali carichi esterni.

$$\text{Se } \delta_q > \frac{L}{2500} \quad \text{si ha} \quad q = \frac{N}{60L} [1 + \alpha]$$

dove: $\alpha = 500 \delta_q / L$ con la limitazione $\alpha \geq 0,2$

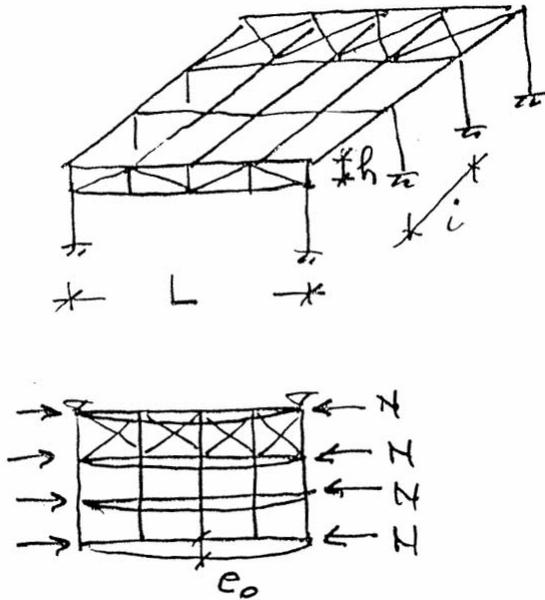
Per membrature aventi vincoli multipli: *n_r membrature da vincolare*

$$q = \frac{\sum N}{60L} [k_r + 0,2] \quad \text{purché} \quad \delta_q \leq \frac{L}{2500}$$

$$\text{Se } \delta_q > \frac{L}{2500} \quad \text{si ha} \quad q = \frac{\sum N}{60L} [k_r + \alpha]$$

Fig. 5.2.5 - Forza stabilizzante equivalente

ESEMPIO



Imperfezione geometrica equivalente:

$$n^{\circ} \text{ aste controventate } n_r = 4$$

$$k_r = \sqrt{0.2 + 1/n_r} = 0.67$$

$$e_0 = k_r L / 500$$

Forza stabilizzante equivalente:

$$q = \frac{N}{50L} \quad \text{se } \delta_q \leq \frac{L}{2500}$$

$$q = \frac{N}{50L} (1 + \alpha) \quad \alpha = \frac{500\delta_q}{L}$$

Dati di progetto: luce: $L = 12 \text{ m}$ interasse: $i = 6 \text{ m}$

altezza trave: $h = L/10 = 1 \text{ m}$

carico distribuito: $q = 2 \text{ kN/m}^2$

coefficiente parziale: $\gamma_q = 1.5$

carico di progetto: $q_k = 3 \text{ kN/m}^2$

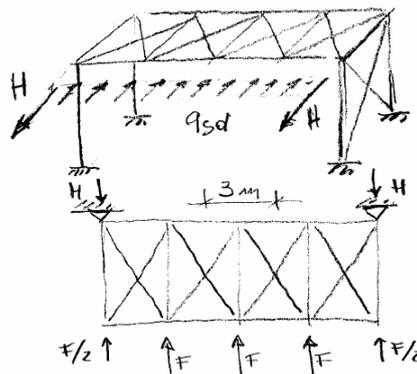
Momento massimo $M_{Sd} = q_d i L^2 / 8 = 324 \text{ kNm}$

Azione assiale di compressione nella capriata:

$$N_{Sd} = M_{Sd} / h = 324 \text{ kN}$$

Forza stabilizzante equivalente:

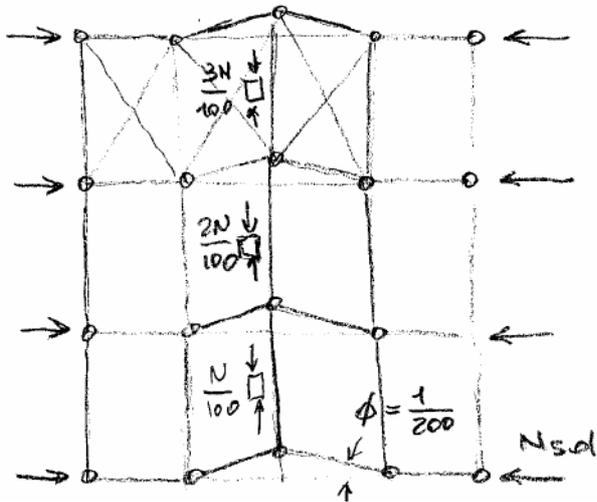
$$q_{Sd} = \frac{N_{Sd}}{50L} k_r 4 = 0.540 \cdot 0.671 \cdot 4 = 1.45 \text{ kN/m}$$



Le azioni sui controventi verticali sono nulle perché le azioni orizzontali $H=(q_{sd}L)/2=8.7 \text{ kN}$ vengono assorbite dalle travi di bordo (v. figura).

Nei nodi della trave di falda vanno applicate le forze:

$$F = 3q_{sd} = 4.35 \text{ kN}$$



Gli arcarecci vanno verificati per l'azione assiale (EC3 #5.4.4.4.(4)):

$$F_L = 3k_r N / 100 = 3 \cdot 0.73 \cdot 3.24 = 7.10 \text{ kN}$$

La trave di controvento deve essere verificata per la forza locale F_L che non deve essere sovrapposta alle F precedenti.

- (4) In corrispondenza dei punti dove le travi o le membrature compresse sono discontinue, si deve anche verificare che il sistema di controvento sia in grado di resistere ad una forza locale addizionale pari a $k_r N / 100$ applicata ad esso attraverso ciascuna trave o membratura compressa e di trasmettere questa forza ai punti adiacenti ai quali la trave o la membratura compressa è vincolata (vedere fig. 5.2.6).
- (5) Nella verifica per questa forza locale devono essere inoltre incluse le eventuali forze esterne agenti sul sistema di controvento, ma possono essere omesse le forze derivanti dalla imperfezione indicata in (1).

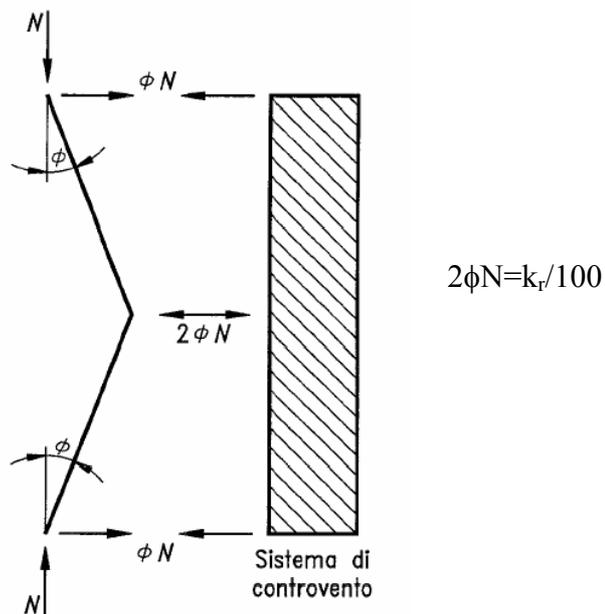


Fig. 5.2.6