ESEMPIO 1

Studiare la ripartizione fra T_T e T_ω e lo stato tensionale per la trave di figura, torsionalmente appoggiata (vincolo a forcella) agli estremi e soggetta al momento torcente T=4.5 kN concentrato in mezzaria.

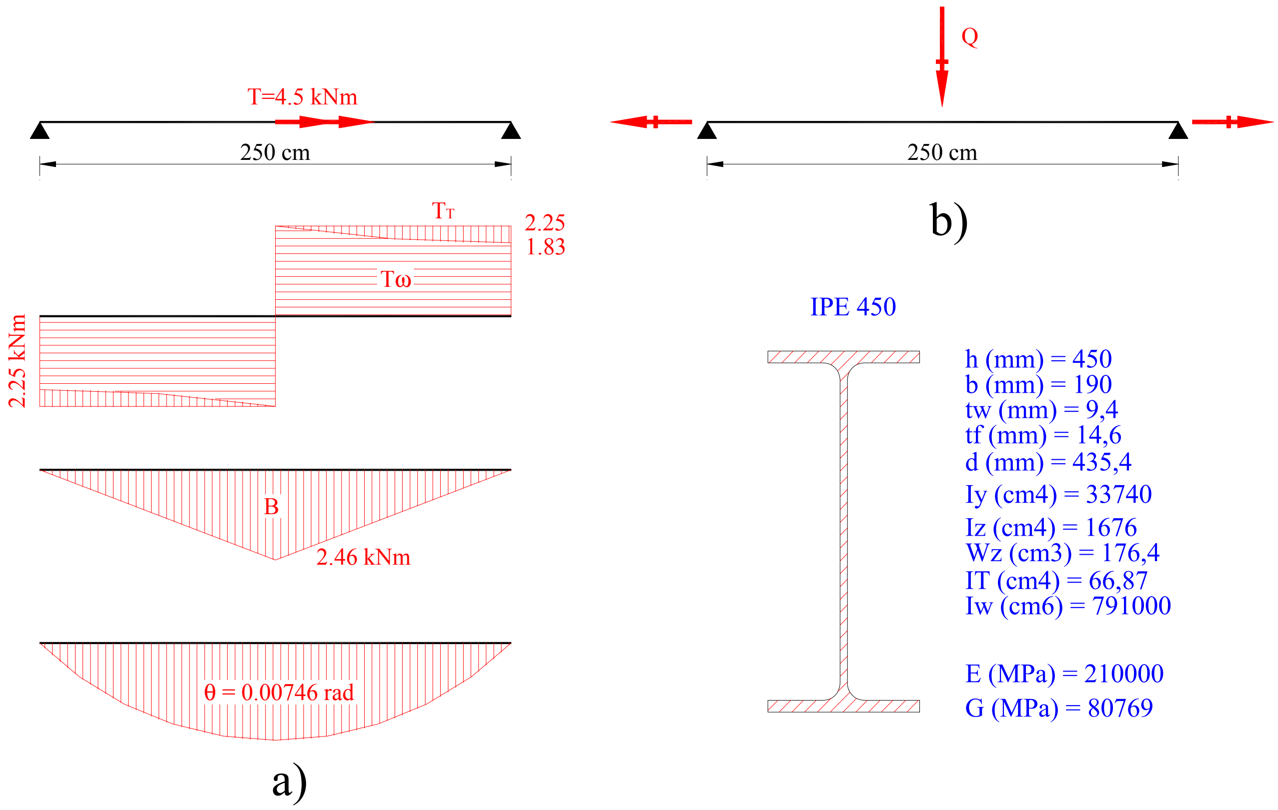

Fig. 1

Le caratteristiche meccaniche della sezione, ricavate dal programma profili, sono riportate in figura. Per un confronto si ricavano con le formule illustrate in precedenza, che sono approssimate perché non tengono conto dei raccordi fra ali e anima:

momento d'inerzia settoriale $$I_\omega = I_z \frac{d^2}{4} = 1676 \frac{43.54^2}{4} = 794311 \quad cm^6$$

area settoriale $$\omega = \frac{b}{2}\frac{d}{2} = \frac{b}{2}\frac{43.54}{2} = 206.8 \quad cm^2$$

momento statico settoriale $$S_\omega = \int_0^s \omega\, dA = \frac{\omega\, b\, t_f}{4} = \frac{206.8 \cdot 19.0 \cdot 1.46}{4} = 1434 \quad cm^4$$

momento d'inerzia torsionale $$I_T = \sum \frac{bt^3}{3} = \frac{2 \cdot 19 \cdot 1.46^3 + 42.08 \cdot 0.94^3}{3} = 51.04 \quad cm^4$$

La trave è soggetta a torsione non uniforme (il momento torcente varia) con ingobbamento nullo in mezzaria per ragioni di simmetria.

CALCOLO APPROSSIMATO

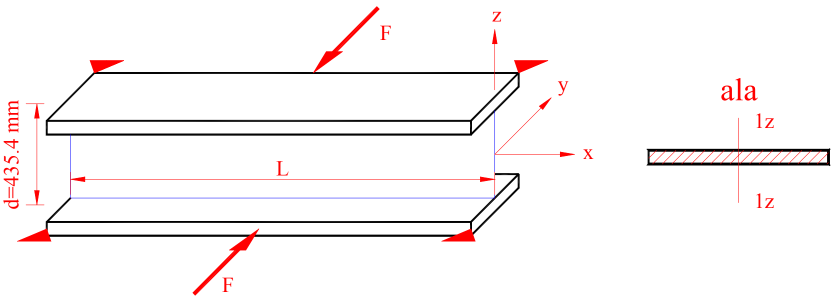

Fig. 2

Se consideriamo il solo comportamento biflessionale, con ali separate dall'anima, possiamo interpretare l'effetto del momento torcente T come l'effetto della coppia di forze F agenti sulle ali (fig. 2). La forza F vale:

F = T/d = 10.3 kN

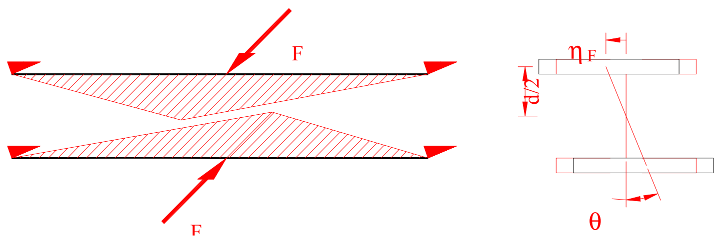

Fig. 3

Ciascuna ala è quindi in flessa dalla forza F in senso contrapposto (fig. 3). Si ha:

M = FL/4 = 6.44 kNm

$I_{1z} = b^3\ t_f/12 = 834.5\ cm^4$ $\quad W_{1z} = b^2\ t_f/6 = 87.84\ cm^3$ $\quad$ (singola ala)

Spostamento dell'ala in direzione di F e rotazione torsionale (fig. 3):

$$\eta_F = \frac{FL^3}{48EI_{1z}} = 1.91\,mm \qquad \theta_{T_\omega} = \frac{\eta_F}{d/2} = 8.79\cdot10^{-3}\,rad$$

Se consideriamo il solo comportamento alla De Saint Venant si ha:

$$\theta_{T_T} = \frac{d\theta}{dx}\frac{L}{2} = \frac{T/2}{GI_T}\frac{L}{2} = \frac{2.25}{80769\cdot66.87}1.25\cdot10^5 = 52.1\cdot10^{-3}\,rad$$

Dal confronto fra le rotazioni si evince che il comportamento è prevalentemente bi-flessionale. Si possono quindi calcolare le tensioni massime in mezzaria, dove comunque si ha T_T=0:

$$\sigma_\omega = \sigma_x = \frac{M}{W_{1z}} = \frac{6.44}{87.84}10^3 = 73.3\,MPa \quad \tau_\omega = \tau_y = \frac{3}{2}\frac{F/2}{A_1} = \frac{3}{2}\frac{5150}{190\cdot14.6} = 2.79\,MPa$$

Con il calcolo esatto si ha (v. più avanti):

$$\sigma_\omega = 63.3\ MPa \quad \tau_\omega = 2.8\ MPa$$

Il calcolo approssimato è quindi leggermente a favore di sicurezza.

CALCOLO ESATTO

Il calcolo viene eseguito utilizzando l'analogia con la presso-flessione (teoria del secondo ordine). La trave, con rigidezza flessionale fittizia EI_ω, va studiata come se fosse soggetta al carico Q = T concentrato in mezzaria e alla forza assiale di compressione $P = -GI_T$ (fig. 1b).

Si ha pertanto:

$$Q = T = 4.5\ kNm = 4.5 \cdot 10^6\ N\,mm \qquad P = -GI_T = -5.401 \cdot 10^{10}\ N\,mm^2$$

$$EI_\omega = 210000 \cdot 791000 \cdot 10^6 = 1.661 \cdot 10^{17}\ N\,mm^4$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{P}{EI}} = \sqrt{\frac{-GI_T}{EI_\omega}} = 0.5702 \cdot 10^{-3}\sqrt{-1} = 0.5702 \cdot 10^{-3}\ i\ mm^{-1}$$

$$\alpha L = 1.426\, i$$

L'espressione della deformata del secondo ordine, che rappresenta nell'analogia la rotazione torsionale θ, è [1]:

$$\theta = z = \frac{Q}{P}\left(\frac{sen(\alpha L/2)}{\alpha\, sen(\alpha L)} sen(\alpha\, x) - \frac{x}{2}\right)$$

Derivando si ha:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{Q}{P}\left(\frac{sen(\alpha L/2)}{sen(\alpha L)} \cos(\alpha\, x) - \frac{1}{2}\right)$$

Queste espressioni contengono numeri complessi. Se non si ha a disposizione un programma che opera coi numeri complessi, si possono trasformare ricordando le relazioni tra funzioni circolari e iperboliche:

$$sen(i\gamma) = i\,Sh\gamma \qquad \cos(i\lambda) = i\,Ch\gamma$$

Ponendo $\alpha = i\,\gamma$ si ha:

$$\theta = z = \frac{Q}{P}\left(\frac{i\,Sh(\gamma L/2)}{i\gamma\, i\,Sh(\gamma L)}[i\,Sh(\gamma\, x)] - \frac{x}{2}\right) = \frac{Q}{P}\left(\frac{Sh(\gamma L/2)}{\gamma\,Sh(\gamma L)} Sh(\gamma\, x) - \frac{x}{2}\right)$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{Q}{P}\left(\frac{Sh(\gamma L/2)}{Sh(\gamma L)} Ch(\gamma\, x) - \frac{1}{2}\right)$$

---

[1] Si veda ad esempio "Teoria e tecnica delle costruzioni – Instabilità dei telai", Mario Caironi, Ed. CLUP, par. 3.6.1.1 eq. (1).

Introducendo i valori numerici otteniamo:

$$Sh(\gamma L/2) = Sh(1.426/2) = 0.7750 \qquad Sh(\gamma L) = Sh(1.426) = 1.961$$

$$\gamma Sh(\gamma L) = 0.5702 \cdot 10^{-3}\, Sh(1.426) = 1.118 \cdot 10^{-3}$$

$$Ch(\gamma L/2) = 1.265$$

$$\theta = z = \frac{4.5 \cdot 10^6}{-5.401 \cdot 10^{10}} \left(\frac{0.7750}{1.118 \cdot 10^{-3}} Sh(\gamma\, x) - \frac{x}{2} \right) = -0.0833 \cdot 10^{-3} \left(693.2 Sh(\gamma\, x) - \frac{x}{2} \right)$$

$$\frac{d\theta}{dx} = -0.0833 \cdot 10^{-3} \left(0.3952\, Ch(\gamma\, x) - \frac{1}{2} \right)$$

Valori in corrispondenza degli appoggi (x=0)

$$\theta = 0 \qquad \frac{d\theta}{dx} = 8.730 \cdot 10^{-6}\ rad/mm$$

Momento torcente primario:

$$T_T = GI_T \frac{d\theta}{dx} = 471500\ Nmm = 0.471\, kNm$$

Il momento torcente secondario è uguale al taglio del secondo ordine nella trave fittizia:

$$T_\omega = V = \frac{Q}{2} + P\frac{dz}{dx} = \frac{4.5 \cdot 10^6}{2} + (-5.401 \cdot 10^{10}) \cdot 8.730 \cdot 10^{-6} = (2.25 - 0.472)10^6 =$$

$$T_\omega = 1.778 \cdot 10^6\, Nmm = 1.778\, kNm \qquad T_T + T_\omega = 2.25 \quad (O.K.)$$

Valori in mezzaria (x=L/2)

$$\theta = z = -0.0833 \cdot 10^{-3} (693.2 \cdot 0.7750 - 625) = 7.31 \cdot 10^{-3}\ rad$$

$$\frac{d\theta}{dx} = -0.0833 \cdot 10^{-3} (0.3952 \cdot 1.265 - 0.5) = 0 \quad \rightarrow \quad T_T = 0$$

$$T_\omega = V = \frac{Q}{2} + P\frac{dz}{dx} = \frac{4.5 \cdot 10^6}{2} + 0 =$$

$$T_\omega = 2.25 \cdot 10^6\, Nmm = 2.25\, kNm \qquad T_T + T_\omega = 2.25 \quad (O.K.)$$

Il bimomento è uguale al momento flettente del secondo ordine nella trave fittizia:

$$B = M = \frac{QL}{4} + Pz = \frac{4.5 \cdot 10^6 \cdot 2500}{4} - 5.401 \cdot 10^{10} \cdot 7.31 \cdot 10^{-3}$$

$$B = (2812 - 395) \cdot 10^6\ Nmm^2 = 24.2 \quad kNm^2$$

Lo stato tensionale è il seguente:

$$\sigma_\omega = \frac{B\omega}{I_\omega} = \frac{24.2 \cdot 10^8 \cdot 206.8 \cdot 10^2}{791000 \cdot 10^6} = 63.3\, MPa$$

$$\tau_\omega = \frac{T_\omega S_\omega}{tI_\omega} = \frac{2.25 \cdot 10^6 \cdot 1434 \cdot 10^4}{14.6 \cdot 791000 \cdot 10^6} = 2.8\, MPa$$