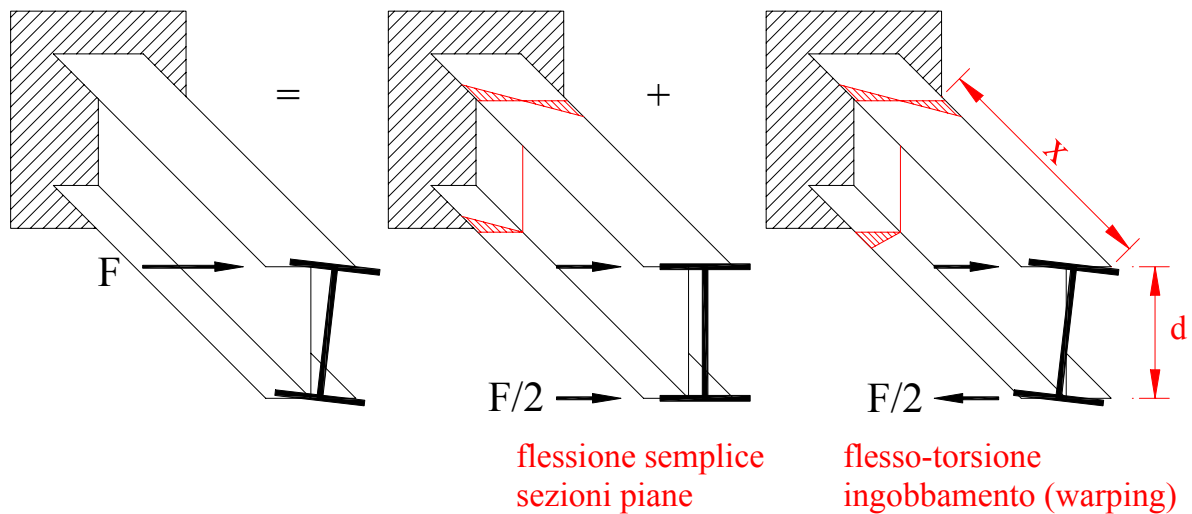


## 8.2.5 Torsione

La teoria tecnica delle travi (De Saint Venant) sottovaluta la resistenza e la rigidezza torsionale dei profili aperti → teoria delle **aree settoriali** o della **torsione non uniforme**.

Per effetto del comportamento spaziale nascono deformazioni lungo le fibre longitudinali della trave e conseguenti tensioni longitudinali  $\sigma_\omega$  (tensioni da ingobbamento impedito).

Questo stato tensionale, detto complementare o secondario, è trascurato dalla teoria classica della torsione. Le  $\sigma_\omega$  possono essere dello stesso ordine di grandezza di quelle da flessione.



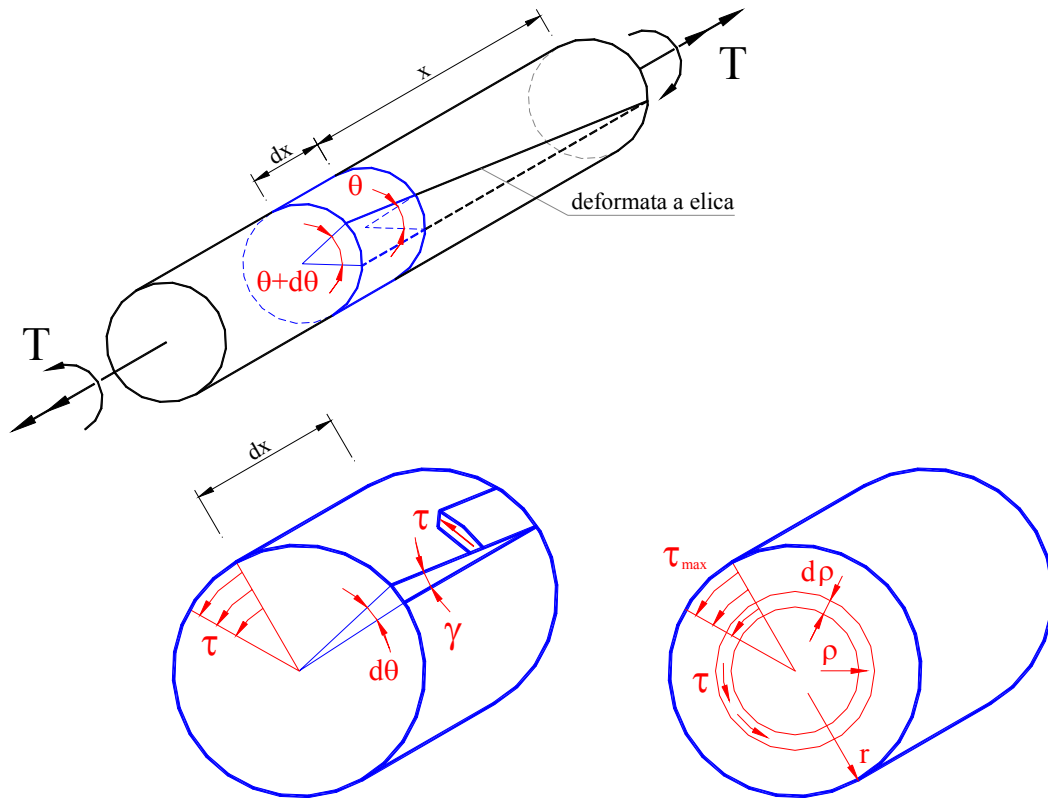
Nella sezione di ascissa  $x$  ciascuna flangia è soggetta al momento flettente  $F/2 x$ .

Si dice che la sezione è soggetta ad una forza generalizzata detta **momento da ingobbamento impedito** o **bimomento**.

$$B \cong \frac{F}{2} d x \quad [N m^2]$$

### 8.2.5.1 Torsione pura (o uniforme)

#### Sezione circolare piena



$$dT = (\tau 2\pi\rho d\rho)\rho = 2\pi\tau\rho^2 d\rho$$

$$\text{essendo: } \tau = \frac{\rho}{r}\tau_{\max} \rightarrow dT = 2\pi\frac{\tau_{\max}}{r}\rho^3 d\rho$$

$$T = \int_0^r dT = \frac{\tau_{\max}}{r} \int_0^r 2\pi\rho^3 d\rho = \frac{\tau_{\max}}{r} I_0 \quad I_0 = \text{momento d'inerzia polare} = I_y + I_z$$

$$\tau_{\max} = \frac{Tr}{I_0} \quad (\text{flessione } \sigma = \frac{Mz}{I})$$

$$r d\theta = \gamma dx \rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \frac{\gamma}{r} = \frac{\tau_{\max}/G}{r} = \frac{T}{GI_0} \quad (\text{flessione } \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{M}{EI})$$

$$G = \text{modulo di elasticità tangenziale} = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$\nu$  = modulo (coefficiente) di Poisson = 0.3

$$E = 210\,000 \text{ N/mm}^2$$

$$G = 80\,700 \text{ N/mm}^2$$

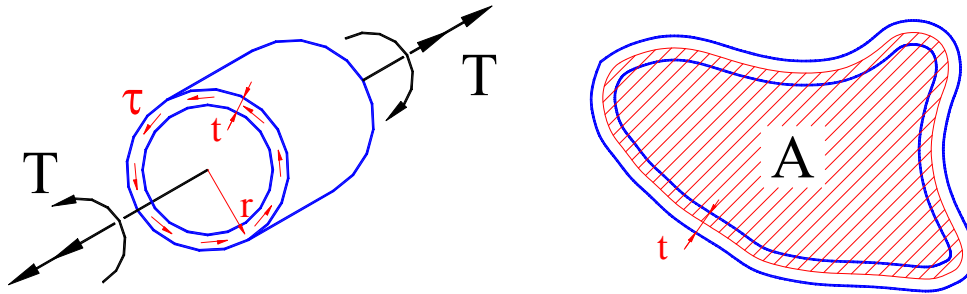
$\frac{d\theta}{dx}$  = angolo unitario di torsione

In generale, per qualsiasi sezione:  $\frac{d\theta}{dx} = \frac{T}{GI_T}$

$I_T$  = momento di inerzia torsionale  $\leq I_0$

Non esiste un'espressione generale per  $I_T$  (così come non esiste per il taglio  $A/\chi$ ).

### Sezione chiusa in parete sottile



$$T = (\tau t 2\pi r)r = 2\tau tA \rightarrow \tau = \frac{T}{2At} \quad (\text{formula di Bredt})$$

Il flusso tensionale  $\tau t$  è tangente al perimetro ed è costante

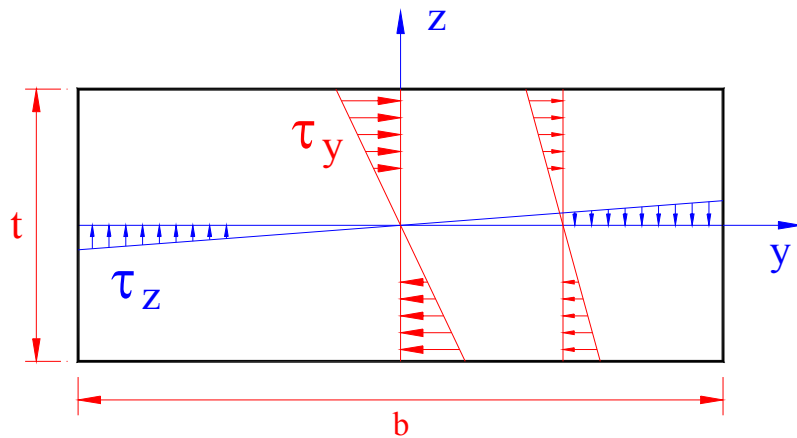
$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{\gamma}{r} = \frac{\tau}{Gr} = \frac{T}{2GAtr} = \frac{T}{GI_T}$$

$$I_T = 2Atr = 2Atr \frac{2\pi r}{2\pi r} = \frac{4A^2}{s/t} \quad (s = \text{perimetro medio})$$

La formula è valida per qualsiasi sezione chiusa in parete sottile, monoconnessa. Se lo spessore è variabile:

$$I_T = \frac{4A^2}{\int_0^s ds/t}$$

## Sezione rettangolare piena

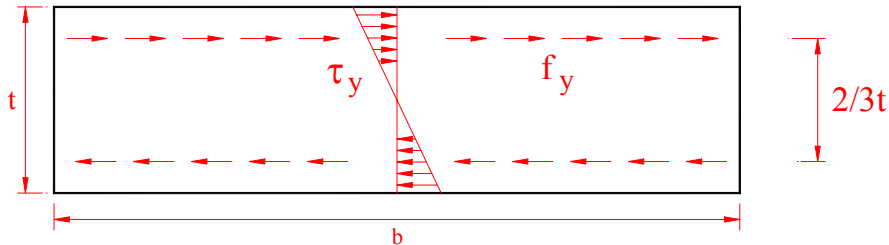


Il flusso delle  $\tau$  è costante, cioè:

$$\frac{1}{2} \tau_y \frac{t}{2} = \frac{1}{2} \tau_z \frac{b}{2}$$

cioè il momento torcente  $T$  viene portato per metà dalle  $\tau_y$  e per metà dalle  $\tau_z$ .

Nel caso di sezioni sottili ( $b/t \gg 2$ ) le  $\tau_y$  rimangono pressoché costanti in tutta la larghezza  $b$ , smorzandosi improvvisamente ai bordi. Si ha quindi:

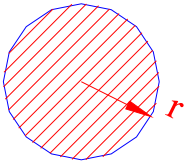
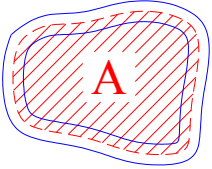
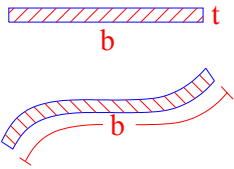


$$f_y = \frac{1}{2} \frac{t}{2} \tau_y \quad \frac{T}{2} = f_y b \frac{2}{3} t$$

$$T = \tau_y \frac{bt^2}{3}$$

$$\tau_y = \frac{T}{\frac{bt^2}{3}} = \frac{Tt}{\frac{bt^3}{3}} = \frac{Tt}{I_T}$$

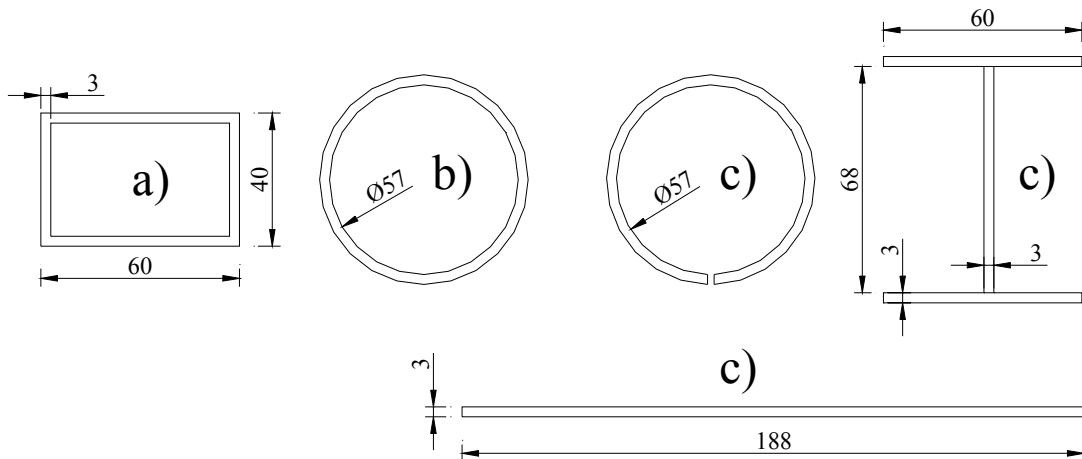
$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{T}{GI_T} \quad \text{con} \quad I_T = \frac{bt^3}{3}$$

Sezione	$\tau_{\max}$	$I_T$
	$\frac{T r}{I_0}$	$I_0$
	$\frac{T}{2A t_{\min}}$	$\frac{4A^2}{\int ds/t}$
	$\frac{T}{bt^2/3} = \frac{T t}{I_T}$	$\frac{b t^3}{3}$

## ESEMPIO

Per le sezioni di figura determinare:

1. il momento d'inerzia torsionale
2. il momento torcente  $T_{adm}$  che provoca una  $\tau_{max} = 90 \text{ N/mm}^2$  ( $\tau_{adm}$  per acciaio Fe360)
3. la rotazione relativa fra le facce estreme distanti  $L=2000 \text{ mm}$  nell'ipotesi di momento torcente costante pari a  $T_{adm}$



### 1. Momento d'inerzia torsionale

Sezione a)

$$A = 57 \times 37 = 2109 \text{ mm}^2 \quad (\text{area})$$

$$s = 2(57+37) = 188 \text{ mm} \quad (\text{perimetro medio})$$

$$I_T = \frac{4A^2}{s/t} = 283\,907 \text{ mm}^4$$

Sezione b)

$$A = \pi 57^2 / 4 = 2552 \text{ mm}^2$$

$$s = \pi 60 = 188 \text{ mm}$$

$$I_T = \frac{4A^2}{s/t} = 415\,705 \text{ mm}^4$$

Sezioni c)

Tutte e tre le sezioni aperte sono equivalenti dal punto di vista torsionale

$$I_T = \frac{bt^3}{3} = 1692 \text{ mm}^4$$

### 2. Momento torcente ammissibile

Sezione a)

$$T_{adm} = 2At\tau_{adm} = 2 \cdot 210900 \cdot 3 \cdot 90 = 1\,139\,000 \text{ Nmm} = 1.139 \text{ kNm}$$

Sezione b)

$$T_{adm} = 2At\tau_{adm} = 2 \cdot 255200 \cdot 3 \cdot 90 = 1\,378\,000 \text{ Nmm} = 1.378 \text{ kNm}$$

Sezione c)

$$T_{adm} = \frac{I_T \tau_{adm}}{t} = 1692 \cdot 10^4 \cdot 90/3 = 50\,760 \text{ Nmm} = 0.051 \text{ kNm}$$

### 3. Rotazione torsionale $\theta$

$$G = 80\,700 \text{ N/mm}^2$$

$$\theta = \frac{T}{GI_T} L$$

Sezione a)

$$\theta = 0.103 \text{ rad} = 5.9^\circ$$

Sezione b)

$$\theta = 0.085 \text{ rad} = 4.9^\circ$$

Sezione c)

$$\theta = 0.770 \text{ rad} = 44.1^\circ \quad !!$$

Pur essendo tutte le sezioni equivalenti come quantità di materiale, le sezioni chiuse sopportano momenti torcenti di gran lunga maggiori con deformazioni di gran lunga inferiori.

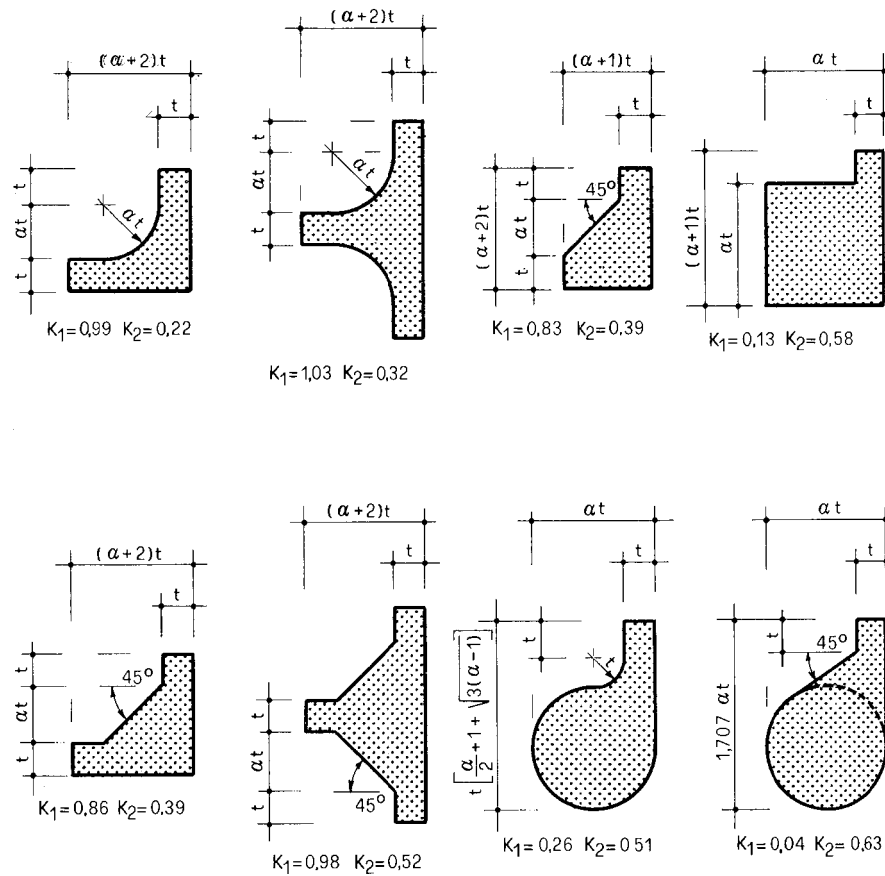


Fig. 8.24

La presenza di raccordi o di bulbi nel profilo sottile conduce ad un aumento di  $I_T$ , che può essere talora sensibile. Tale aumento è valutabile in via approssimata con la seguente espressione (vedi fig. 8.24):

$$\Delta I_T = \{(k_1 + k_2 \alpha) t\}^4 \quad (8.57)$$



### 8.2.5.2 Torsione da ingobbamento impedito

Torsione non uniforme.

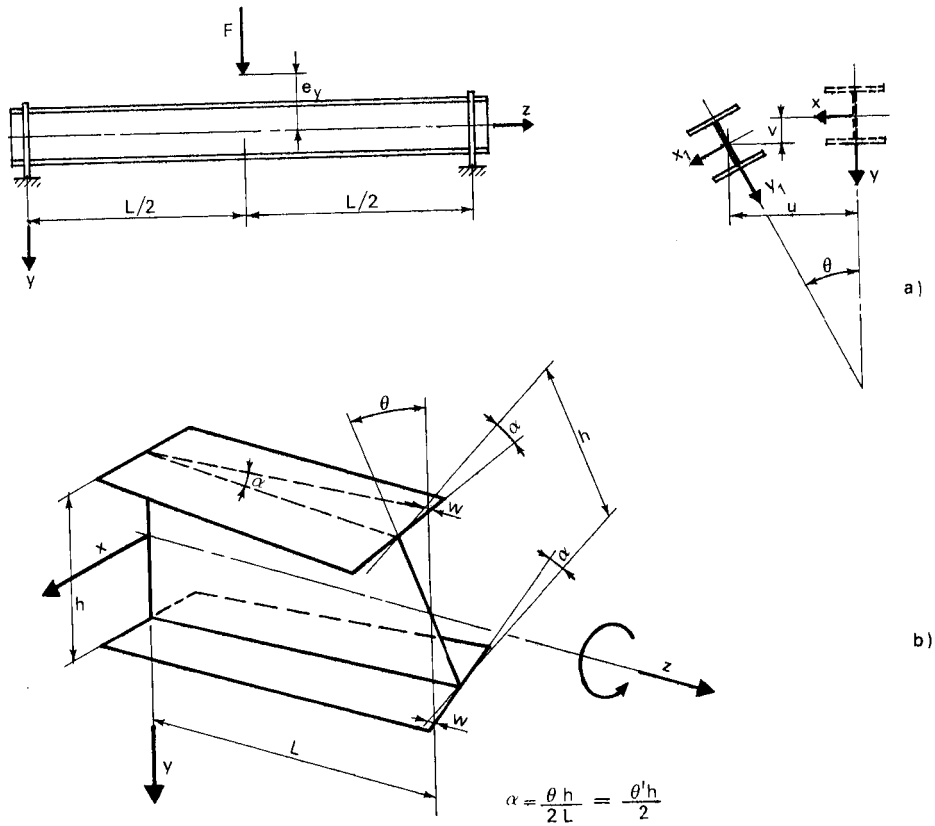
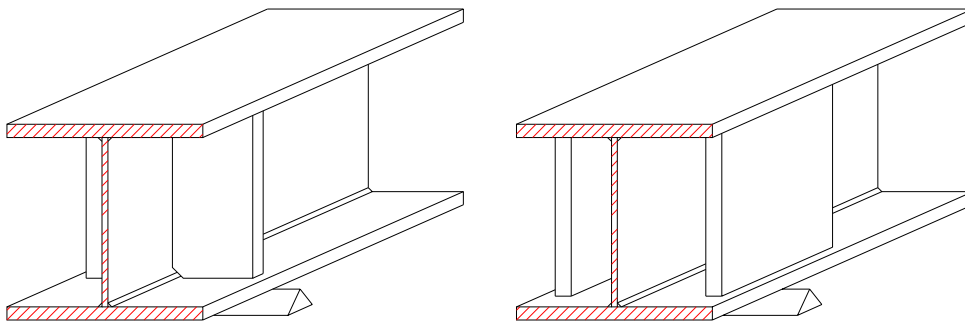


Fig. 8.27

L'incastro torsionale deve impedire l'ingobbamento



appoggio torsionale

semi-incastro torsionale

Illustriamo il fenomeno della torsione non uniforme per il caso di un'asta con sezione a doppio T nel quale è particolarmente evidente.

Un'asta libera ad un estremo e vincolata all'altro estremo in modo da impedirne la rotazione torsionale ma non l'ingobbamento (cerniera o appoggio torsionale o vincolo a forcilla) si deforma per effetto del momento torcente  $T$  come in figura 1a). L'asta è soggetta a momento torcente

costante e le sue sezioni si ingobbano liberamente. Si ha torsione pura, l'angolo unitario di torsione  $d\theta/dx$  è costante e valgono le formule del capitolo precedente.

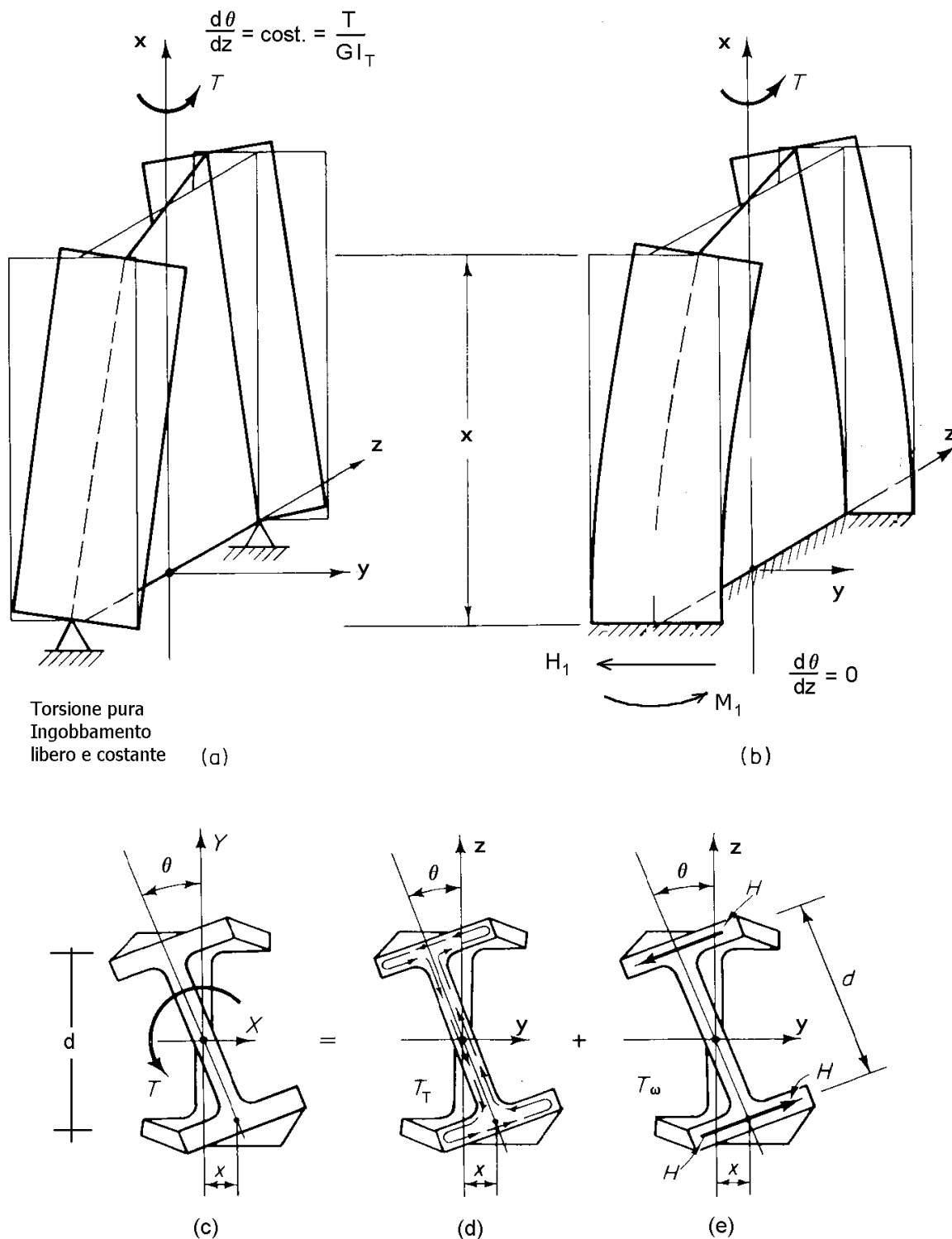


Fig. 1

Se invece la base è impedita anche di ingobbarsi (incastro torsionale), l'asta si deforma come in figura 1b). Ciascuna delle due ali si comporta parzialmente come un'asta isolata, di sezione rettangolare, inflessa intorno al suo asse z di massima inerzia. All'incastro l'angolo unitario di

torsione  $d\theta/dx$  è nullo e il momento torcente  $T$  è supportato interamente dalla coppia  $H_1d$ . Il flusso delle tensioni tangenziali non è più quello della torsione pura (figg. 1d, 2a), ma è quello dovuto alla forza di taglio  $H$  agente sulla sezione rettangolare dell'ala (figg. 1e, 2b), che chiameremo flusso delle tensioni tangenziali secondarie da ingobbamento impedito e indicheremo con  $\tau_\omega$ .

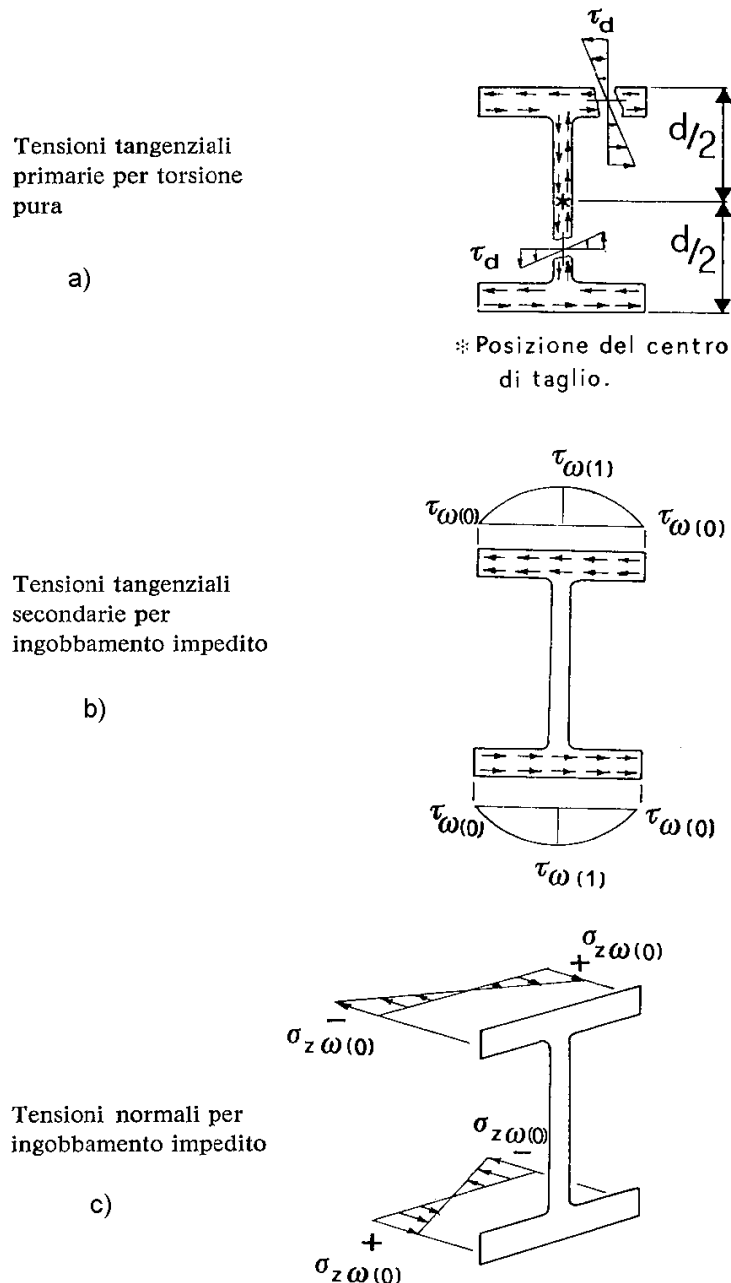
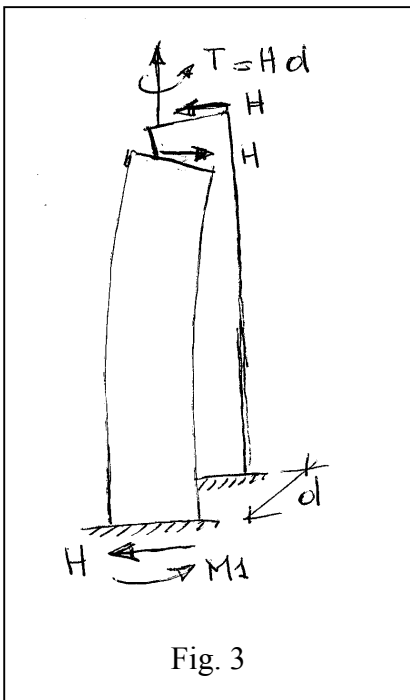


Fig. 2

Le forze  $H$  decrescono verso l'estremo. Pertanto, allontanandosi dall'incastro torsionale, l'aliquota del momento torcente supportata dalle  $H$  diminuisce a favore di quella supportata dal flusso tensionale della torsione pura.

Il momento torcente esterno  $T$  è quindi sopportato (fig. 1d) dal flusso delle tensioni primarie di torsione pura, che ha come risultante il momento torcente  $T_T$  (momento torcente primario o torsione alla De Saint Venant, *pure torsion*) e dal flusso delle tensioni secondarie, che indicheremo col suffisso  $\omega$ , di risultante  $T_\omega$  (momento torcente secondario o da ingobbamento impedito, *warping torque*).

Naturalmente la distribuzione delle  $H$  richiede in ogni ala la presenza di un momento flettente ( $M_1$  di fig. 1b) e quindi la presenza di tensioni  $\sigma_x$  (fig. 2c) che indicheremo con  $\sigma_\omega$ .



Lo stato tensionale ora descritto si chiama torsione mista o torsione non uniforme o torsione da ingobbamento impedito e si ha tutte le volte che l'ingobbamento delle sezioni non è costante per la presenza di vincoli (ingobbamento impedito) o perché varia il momento torcente (torsione non uniforme). Rispetto al caso della torsione pura, l'asta risulta più rigida.

Se le due ali non fossero collegate dall'anima (Fig. 3) il momento  $T$  sarebbe sopportato interamente dalle  $H$  ( $T=Hd$ ) che sarebbero costanti. Questo caso limite rappresenta il comportamento di un'asta che resiste a torsione per puro ingobbamento impedito, mobilitando una resistenza biflessionale.

Ricaviamo le formule che reggono la torsione mista nel caso della sezione a doppia T, per poi estenderle al caso di sezione generica.

Il momento torcente  $T$  si divide nelle due aliquote  $T_T$  e  $T_\omega$ :

$$T = T_T + T_\omega \quad 1)$$

Per quanto detto nel paragrafo precedente:

$$T_T = GI_T \frac{d\theta}{dx} \quad 2)$$

$T_\omega$  è determinato dalla coppia  $Hd$ . A sua volta la forza di taglio  $H$  agente nell'ala è legata al momento flettente  $M$  (che varia nell'ala raggiungendo il valore  $M_1$  alla base) dalla nota relazione:

$$H = \frac{dM}{dx} \quad 3)$$

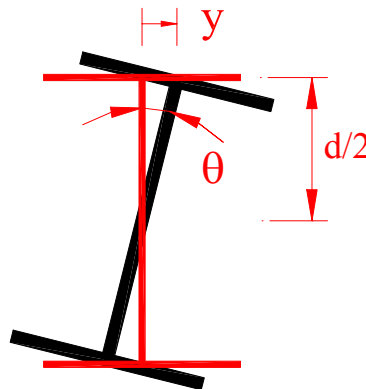
Il legame tra  $M$  e lo spostamento  $x$  è dato dall'equazione differenziale della linea elastica:

$$M = -EI_{1z} \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{EI_z}{2} \frac{d^2y}{dx^2} \quad 4)$$

avendo indicato con  $I_{1z}$  il momento d'inerzia della singola ala intorno all'asse di flessione  $z$ , cioè, trascurando il piccolo contributo dell'anima, metà del momento  $I_z$  della sezione.

Sostituendo la 4) nella 3) si ha pertanto:

$$H = -\frac{EI_z}{2} \frac{d^3 y}{dx^3} \quad 5)$$



Dalla figura si ricava  $y = \theta d/2$ .

Ricordando inoltre che  $H = T_\omega/d$  si ha infine:

$$\frac{d^3 \theta}{dx^3} = -\frac{T_\omega}{EI_z d^2/4} \quad 6)$$

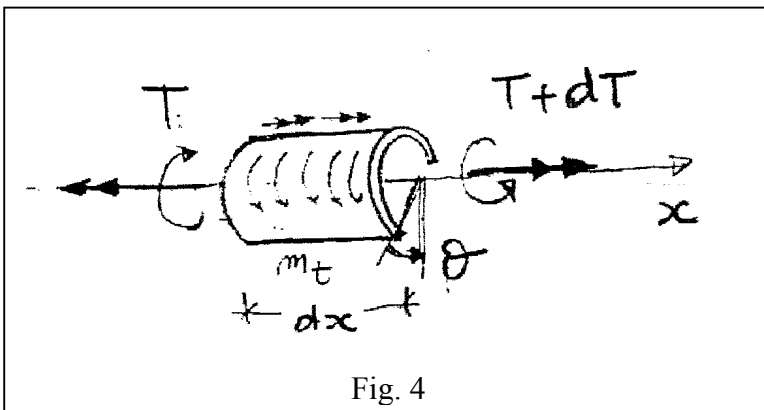
Il termine  $I_z d^2/4$  è una caratteristica della sezione che in generale viene chiamata **momento di inerzia settoriale  $I_\omega$**  (dimensioni  $L^6$ ). In generale si ha quindi:

$$T_\omega = -EI_\omega \frac{d^3 \theta}{dx^3} \quad 7)$$

Combinando le (1), (2), (7) si ottiene l'equazione differenziale della torsione mista:

$$\boxed{EI_\omega \frac{d^3 \theta}{dx^3} - GI_T \frac{d\theta}{dx} = -T} \quad 8)$$

Nel caso di momento torcente distribuito (fig. 4), di valore  $m_t$  per unità di lunghezza, per l'equilibrio si ha:



$$(T+dT) + m_t dx = T$$

da cui:

$$dT = -m_t dx$$

In figura 4 sono indicate le convenzioni di segno. Con freccia doppia si indica il vettore momento col segno dato dalla regola del cacciavite (cavatappi !!).

Derivando la (8) si ha pertanto:

$$EI_{\omega} \frac{d^4 \theta}{dx^4} - GI_T \frac{d^2 \theta}{dx^2} = m_t \quad 9)$$

Questa equazione differenziale è formalmente uguale a quella che regge il problema dell'asta sottoposta a carico trasversale  $q=q(x)$  in presenza di forza assiale  $P$  di compressione (v. Caironi Instabilità dei telai piani par. 3.6). Si ha infatti:

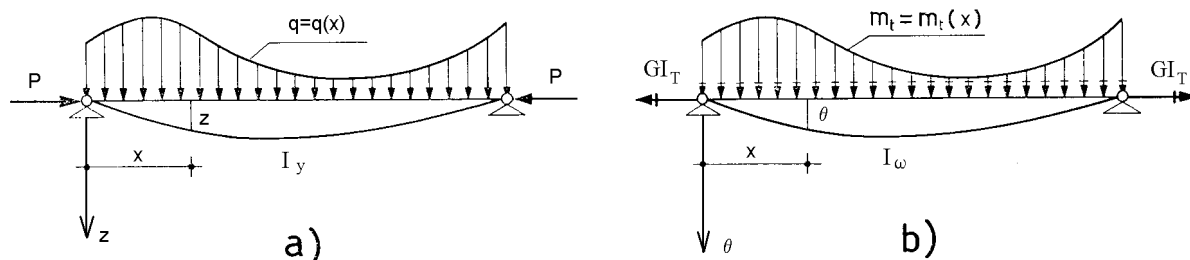


Fig. 5

$$EI_y \frac{d^2 z}{dx^2} + Pz = -M \quad 10)$$

Derivando due volte e ricordando che  $d^2M/dx^2 = -q$  si ha:

$$EI_y \frac{d^4 z}{dx^4} + P \frac{d^2 z}{dx^2} = q \quad 11)$$

Si può quindi affermare che la rotazione  $\theta$  provocata dal momento torcente  $m_t$  è uguale all'abbassamento  $z$  provocato dal carico distribuito  $q$  su una trave fittizia con momento d'inerzia  $I_y = I_{\omega}$ , soggetta alla forza di compressione  $P = -GI_T$  (cioè ad una forza di trazione). L'analogia è illustrata in Fig. 5.

Lo stato flessionale che accompagna la torsione non uniforme è descritto da un parametro che è funzione della distribuzione del momento flettente sulla sezione. Poiché globalmente il momento flettente è nullo sulla sezione (v. fig. 1b ove sulla sezione agiscono le due coppie  $M_1$  uguali e contrarie), tale parametro sarà funzione del valore e della posizione del momento massimo. Il parametro normalmente usato viene detto **bimomento (B)** o **momento da ingobbamento** ed ha le dimensioni di un momento per una distanza. Nel caso della sezione a doppio T si ha:

$$B = M d$$

ricordando la (3) si ha:

$$B = -\frac{EI_z}{2} \frac{d^2 y}{dx^2} d = -\frac{EI_z}{2} \frac{d}{2} \frac{d^2 \theta}{dx^2} d = -EI_z \frac{d^2}{4} \frac{d^2 \theta}{dx^2}$$

$$B = -EI_{\omega} \frac{d^2 \theta}{dx^2} \quad 12)$$

E' evidente l'analogia della (12) con l'equazione differenziale della linea elastica:

$$M = -EI_y \frac{d^2 z}{dx^2} \quad (13)$$

Per quanto riguarda la distribuzione delle  $\sigma_x$  si considera ancora il caso della sezione a doppio T.

Nell'ala si ha una  $\sigma_x$  data dalla nota formula:

$$\sigma_x = \frac{M}{I_{yz}} y = \frac{M}{I_z/2} y$$

Moltiplicando e dividendo per  $d^2/2$  si ha:

$$\sigma_\omega = \sigma_x = \frac{Md}{I_z} y \frac{d}{2} = \frac{B}{I_\omega} y \frac{d}{2}$$

Il prodotto  $yd/2$  rappresenta il doppio dell'area tratteggiata in figura 6, detta **area settoriale**  $\omega$ , che è l'area descritta dal raggio vettore CP percorrendo il contorno medio della sezione con polo C (C = centro di taglio).

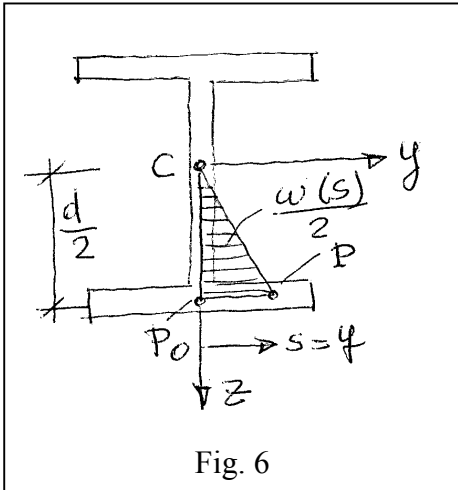


Fig. 6

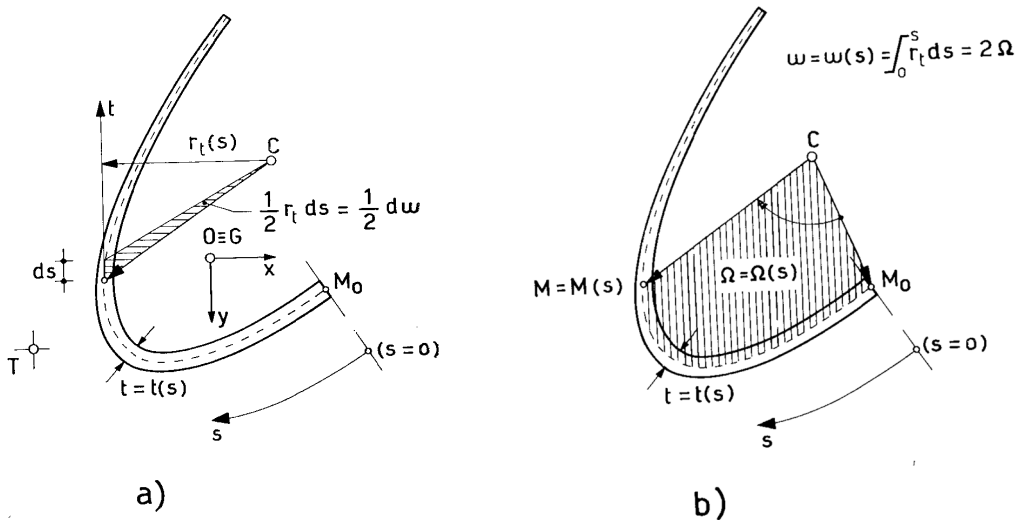


Fig. 7

La coordinata  $s$  viene misurata a partire da un punto  $P_0$  detto punto settoriale nullo (Fig. 7). Si ha quindi:

$$\sigma_\omega = \sigma_z = \frac{B}{I_\omega} \omega(s) \quad (14)$$

Rinviando alla letteratura specializzata<sup>1</sup> per gli ulteriori approfondimenti sulla teoria delle aree settoriali, si riassumono i parametri caratteristici della torsione non uniforme, notando che hanno nomi e utilizzo analoghi a quelli della flessione e del taglio e che il parametro area settoriale  $\omega$ , che è funzione della posizione del punto considerato, sostituisce il parametro distanza dall'asse baricentrico.

- area settoriale  $\omega = \omega(s) = \int_0^s r_t(s) ds \quad [L^2]$

- momento statico settoriale  $S_\omega = \int_0^s \omega dA \quad [L^4]$

- momento d'inerzia settoriale  $I_\omega = \int_0^s \omega^2 dA \quad [L^6]$

- tensione tangenziale primaria  $\tau_T = \frac{T_T}{I_T} t$

- tensione tangenziale secondaria  $\tau_\omega = \frac{T_\omega}{t I_\omega} S_\omega$

- tensione normale  $\sigma_\omega = \sigma_z = \frac{B}{I_\omega} \omega(s)$

---

<sup>1</sup> Cfr. "La torsione nei profilati e nelle travi metalliche", F. M. Mazzolani, Ed. Cisia. Vedi anche il Ballio.



Nello specchio che segue viene riassunta l'analogia tra la presso-flessione e la torsione mista. Per una migliore comprensione si vedano gli esempi numerici.

Analogia presso-flessione torsione mista	
presso-flessione	torsione mista
$q(x)$	$m_t(x)$
$P$	$-GI_T$
$I$	$I_w$
$\alpha = \sqrt{\frac{P}{EI_y}}$	$\alpha = \sqrt{-\frac{GI_T}{EI_w}} = i \sqrt{\frac{GI_T}{EI_w}}$
$z$	$\theta$
$\frac{dz}{dx} = \varphi$	$\frac{d\theta}{dx} = \frac{T_T}{GI_T}$
$\varphi$	$\frac{T_T}{GI_T}$
$\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{M}{EI_y}$	$\frac{d^2\theta}{dx^2} = -\frac{B}{EI_w}$
$M$	$B$
$\frac{d^3z}{dx^3} = -\frac{V}{EI_y}$	$\frac{d^3\theta}{dx^3} = -\frac{T_w}{EI_w}$
$V$	$T_w$

Si ricava in particolare che il bimomento  $B$  corrisponde nell'analogia al momento flettente del secondo ordine  $M$  e il momento torcente da ingobbamento  $T_w$  corrisponde al taglio  $V$ .

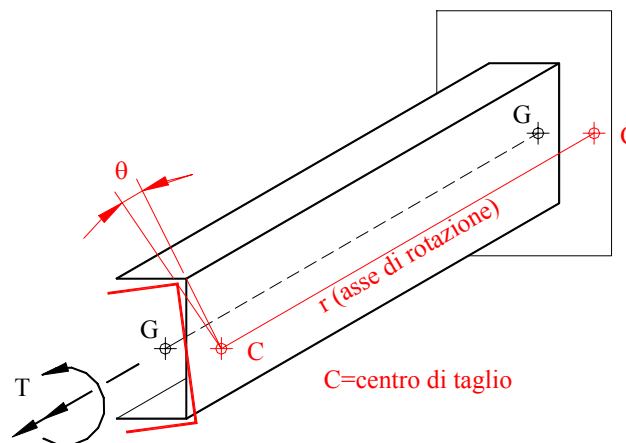


Fig. 8 – Asse di rotazione

Per quanto riguarda l'asse intorno al quale avviene la rotazione per torsione, esso è parallelo all'asse baricentrico e passa per il centro di taglio (retta r fig. 8). Questa affermazione è dimostrabile applicando il teorema di reciprocità di Betti. E' noto infatti che un carico trasversale Q con retta di applicazione passante per il centro di taglio non dà torsione e quindi determina traslazione della sezione senza rotazione. Il momento torcente T compirà quindi lavoro nullo per la deformazione prodotta da Q. Reciprocamente il carico Q compie lavoro nullo per la deformazione prodotta da T e quindi la retta r non può traslare ed è l'asse di rotazione.

E' utile introdurre il coefficiente k che rappresenta la "lunghezza dimensionale caratteristica della trave:

$$k = L \sqrt{\frac{GI_T}{EI_\omega}}$$

La torsione secondaria è tanto maggiore quanto più è piccolo il valore di k, cioè quanto più è grande la "rigidezza torsionale secondaria"  $EI_\omega/L^2$  rispetto a quella primaria  $GI_T$ .

In Fig. 9 (Fig 8.34 Ballio) è evidenziato il comportamento torsionale di vari tipologie di travi in funzione del parametro k.

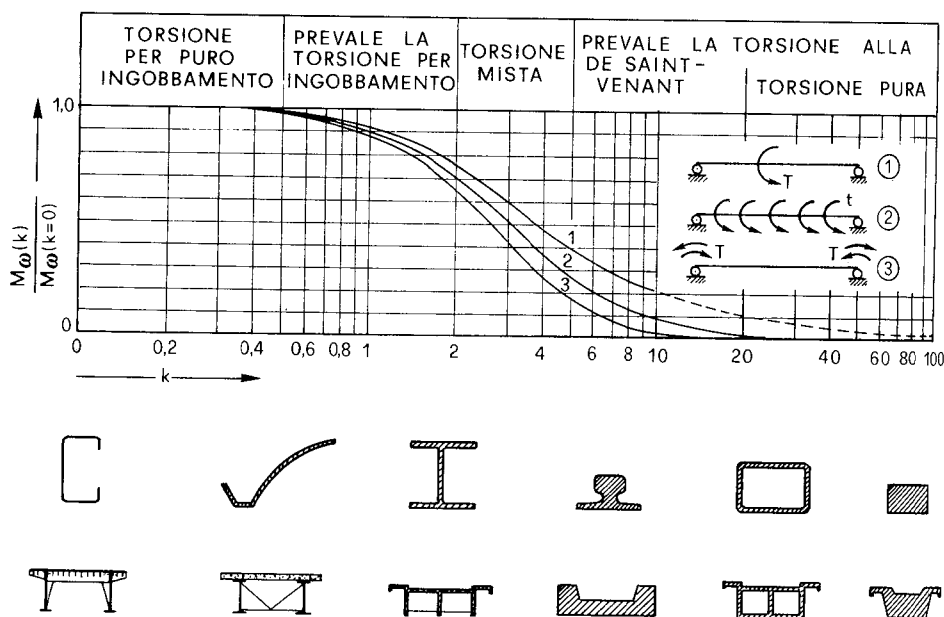


Fig. 9

Per i profili laminati a caldo con le luci usuali per la flessione prevale la torsione pura ( $5 < k < 20$ ).

Ad esempio per un profilo HE300B, con una luce di 3 m (rapporto luce/altezza=10, valore modesto nel caso di flessione), si ha:

$$k = L \sqrt{\frac{GI_t}{EI_\omega}} = 3000 \sqrt{\frac{80\,769 \cdot 185 \cdot 10^4}{210\,000 \cdot 1\,688\,000 \cdot 10^6}} = 1.95$$

Siamo nel campo della torsione mista, nonostante la luce modesta per il tipo di profilo.