

VERIFICHE DI STABILITA'

CNR 10011/85 §7

Secondo la normativa italiana (CNR 10011 e D.M. 6/1/1996) deve essere:

$$\frac{S_c}{S} \geq n \quad (1)$$

dove:

$\sigma_c = N_c/A$ è la tensione corrispondente alla forza N_c che provoca l'inflessione laterale dell'asta nel piano che si considera;

$\sigma = N/A$ è la tensione assiale di compressione media

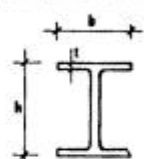
$v = 1.5$ è il coefficiente di sicurezza

I valori di σ_c sono tabulati nel prospetto 7-I in funzione del rapporto I/\bar{I}_y dove:

$$\bar{I}_y = p \sqrt{\frac{E}{f_y}} \quad \text{è la snellezza al limite elastico.}$$

E' presentata anche una formulazione analitica che approssima i valori tabulati.

Prospetto 7-I — Valori σ_c/f_y

λ/λ_y	σ_c/f_y				Aste	Forma della sezione	Curva
	curva a	curva b	curva c	curva d			
0.00	1.000	1.000	1.000	1.000	semplici	profili cavi quadri, rettangoli o tondi saldati o laminati $t \leq 40$ mm	a
0.10	1.000	1.000	1.000	1.000			
0.20	1.000	1.000	1.000	1.000			
0.30	.978	.965	.951	.917			
0.40	.953	.925	.900	.841	semplici	I laminati $\frac{h}{b} \geq 1,2$ $t \leq 40$ 	b
0.50	.923	.885	.843	.769			
0.60	.885	.838	.783	.699			
0.70	.844	.785	.719	.633			
0.80	.796	.727	.655	.572			
0.90	.739	.663	.593	.517			
1.00	.674	.599	.537	.468			
1.10	.606	.538	.486	.424			
1.20	.540	.481	.439	.385			
1.30	.480	.429	.395	.350			
1.40	.427	.383	.357	.319			
1.50	.381	.343	.323	.290			
1.60	.341	.308	.293	.265			
1.70	.306	.277	.266	.242			
1.80	.277	.250	.241	.222			
1.90	.251	.226	.219	.204			
2.00	.228	.205	.200	.188			
2.10	.208	.188	.183	.173			
2.20	.190	.173	.169	.160			
2.30	.175	.159	.158	.148			
2.40	.162	.147	.147	.138			
2.50	.149	.137	.137	.129			
2.60	.138	.128	.128	.120			
2.70	.128	.119	.119	.112			
2.80	.119	.110	.110	.105			
2.90	.112	.103	.103	.098			
3.00	.105	.096	.096	.092			
					Semplici o composte	chiusa, a cassone, saldata $t \leq 40$	c
						generica $t \leq 40$ mm	
						tutte $t > 40$ mm	d

La (1) può essere scritta nel seguente modo:

$$\frac{s}{s_c} \leq \frac{1}{n} \rightarrow \frac{f_y}{s_c} s \leq \frac{f_y}{n} = s_{adm} \rightarrow w s \leq s_{adm}$$

avendo posto $w = \frac{f_y}{s_c}$

I valori di ω sono tabulati per esteso in funzione della snellezza, del tipo di acciaio e della curva di stabilità (a, b, c, d).

Prospetto 7-IIa

Acciaio Fe 360
coefficienti ω

λ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	λ
0	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0
10	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	10
20	1.00	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01	1.02	1.02	1.02	1.03	20
30	1.03	1.03	1.03	1.04	1.04	1.04	1.05	1.05	1.05	1.06	30
40	1.06	1.06	1.07	1.07	1.07	1.08	1.08	1.09	1.09	1.10	40
50	1.10	1.11	1.11	1.12	1.12	1.13	1.13	1.14	1.14	1.15	50
60	1.16	1.16	1.17	1.17	1.18	1.18	1.19	1.20	1.20	1.21	60
70	1.22	1.23	1.24	1.24	1.25	1.26	1.27	1.28	1.29	1.30	70
80	1.31	1.32	1.33	1.34	1.36	1.37	1.38	1.40	1.41	1.42	80
90	1.44	1.45	1.47	1.48	1.50	1.52	1.53	1.55	1.57	1.59	90
100	1.61	1.63	1.65	1.67	1.69	1.71	1.73	1.75	1.77	1.79	100
110	1.82	1.84	1.86	1.89	1.91	1.94	1.96	1.99	2.01	2.04	110
120	2.06	2.09	2.12	2.14	2.17	2.20	2.22	2.25	2.28	2.31	120
130	2.34	2.37	2.40	2.43	2.46	2.49	2.52	2.55	2.58	2.61	130
140	2.65	2.68	2.71	2.74	2.78	2.81	2.84	2.88	2.91	2.95	140
150	2.93	3.02	3.05	3.08	3.12	3.16	3.19	3.23	3.27	3.30	150
160	3.34	3.38	3.41	3.45	3.49	3.53	3.56	3.60	3.64	3.68	160
170	3.72	3.76	3.80	3.84	3.88	3.92	3.96	4.01	4.05	4.09	170
180	4.14	4.18	4.22	4.27	4.31	4.35	4.40	4.44	4.49	4.53	180
190	4.58	4.62	4.67	4.72	4.77	4.81	4.85	4.90	4.94	4.99	190
200	5.03	5.08	5.13	5.18	5.22	5.27	5.32	5.37	5.42	5.47	200
210	5.52	5.57	5.62	5.67	5.72	5.77	5.82	5.87	5.92	5.98	210
220	6.03	6.08	6.14	6.19	6.24	6.30	6.36	6.41	6.46	6.52	220
230	6.57	6.63	6.69	6.74	6.79	6.84	6.90	6.96	7.02	7.08	230
240	7.14	7.19	7.25	7.31	7.38	7.44	7.50	7.55	7.61	7.67	240
250	7.73										250

RESISTENZA DELLE MEMBRATURE

ALL'INSTABILITA' [EC3 #5.5]

5.5.1 Membrature compresse

5.5.1.1 Resistenza all'instabilità

(1) La resistenza di progetto all'instabilità di una membratura compressa va assunta pari a:

$$N_{b,Rd} = c(b_A A) f_y / g_{M1} \quad (b = buckling)$$

$$\text{con: } b_A = A_{eff} / A \quad (=1 \text{ per sezioni di classe 1,2,3})$$

$$g_{M1} = 1.1$$

Invece di amplificare le sollecitazioni col coefficiente ω , come la normativa italiana, l'Eurocodice applica il coefficiente riduttivo della resistenza χ . In pratica si ha $\chi = 1/\omega$.

Il coefficiente χ è tabulato (prospetto 5.5.2) in funzione della snellezza adimensionale:

$$\bar{\lambda} = \frac{l}{I_1} \sqrt{b_A} = \sqrt{\frac{N_y}{N_{cr}}} = \sqrt{\frac{b_A f_y}{s_{cr}}}$$

Si ha infatti:

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{b_A f_y}{s_{cr}}} = \sqrt{b_A} \sqrt{\frac{f_y}{p^2 E / I^2}} = \sqrt{b_A} \frac{l}{p \sqrt{E / f_y}} = \sqrt{b_A} \frac{l}{I_1}$$

Se come riferimento si assume la snellezza al limite elastico per l'acciaio Fe360 (S 235) che vale 93.9 si può scrivere:

$$I_1 = 93.9 e \quad \text{con} \quad e = \sqrt{\frac{235}{f_y}}$$

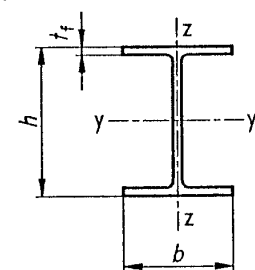
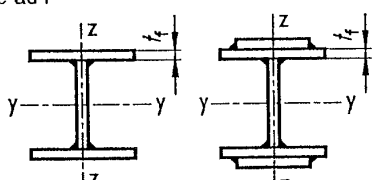
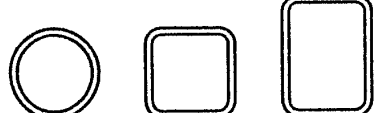
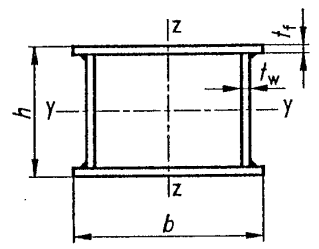
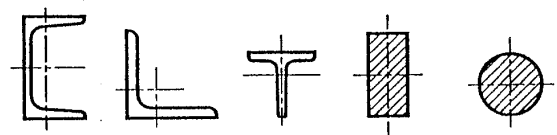
I valori del coefficiente χ possono anche essere ricavati analiticamente in base al coefficiente di imperfezione α :

Prospetto 5.5.2 – Coefficienti di imperfezione

Curva di instabilità	a	b	c	d
Coefficienti di imperfezione α	0,21	0,34	0,49	0,76

(1) Per l'instabilità flessionale la curva di instabilità appropriata va determinata dal prospetto 5.5.3.

Prospetto 5.5.3 - Selezione della curva di instabilità per una sezione trasversale

Sezione trasversale	Limiti	Instabilità attorno all'asse	Curva di instabilità
Sezioni laminare ad I 	$h/b > 1,2:$ $t_f \leq 40 \text{ mm}$	y-y	a
	$40 \text{ mm} < t_f \leq 100 \text{ mm}$	z-z	b
	$h/b > 1,2:$ $t_f \leq 100 \text{ mm}$	y-y	b
	$t_f > 100 \text{ mm}$	z-z	d
Sezioni saldate ad I 	$t_f \leq 40 \text{ mm}$	y-y	b
	$t_f > 40 \text{ mm}$	z-z	c
Sezioni cave 	laminare a caldo	tutti	a
	profilate a freddo - uso di f_{yb} *)	tutti	b
	profilate a freddo - uso di f_{ya} *)	tutti	c
Sezioni scatolari saldate 	in generale (eccettuato quanto sotto)	tutti	b
	saldature spesse e $b/t_f < 30$ $b/t_w < 30$	y-y	c
Sezioni ad U, L, T e sezioni piene 		tutti	c

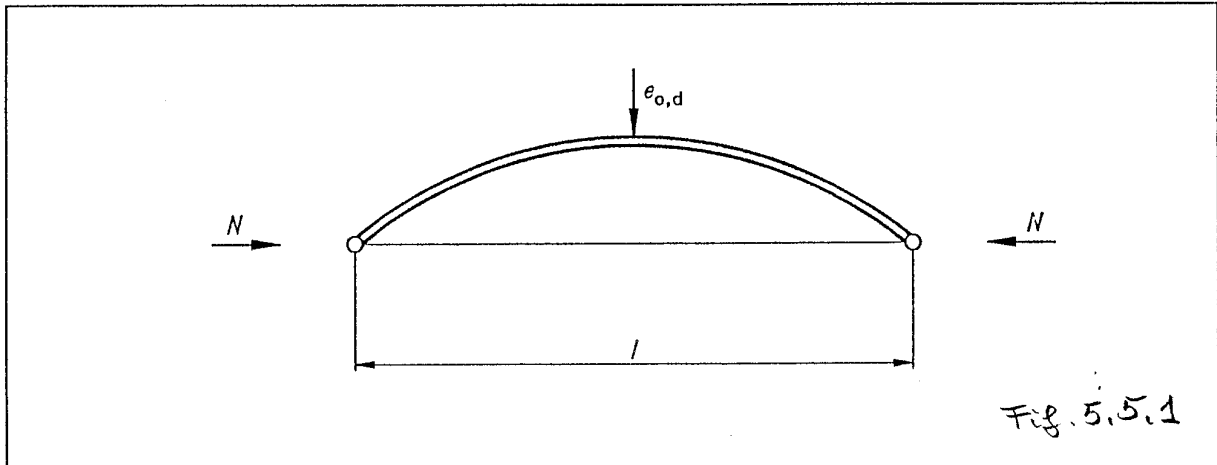
*) Vedere 5.5.1.4(4) e fig. 5.5.2.

Prospetto 5.5.2 - Coefficienti di riduzione

$\bar{\lambda}$	χ per curve di instabilità			
	a \otimes	b \otimes	c \otimes	d \otimes
0,2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,3	0,9775	0,9641	0,9491	0,9235
0,4	0,9528	0,9261	0,8973	0,8504
0,5	0,9243	0,8842	0,8430	0,7793
0,6	0,8900	0,8371	0,7854	0,7100
0,7	0,8477	0,7837	0,7247	0,6431
0,8	0,7957	0,7245	0,6622	0,5797
0,9	0,7339	0,6612	0,5998	0,5208
1,0	0,6656 0,674	0,5970 0,589	0,5399 0,537	0,4671 0,468
1,1	0,5960	0,5352	0,4842	0,4189
1,2	0,5300	0,4781	0,4338	0,3762
1,3	0,4703	0,4269	0,3888	0,3385
1,4	0,4179	0,3817	0,3492	0,3055
1,5	0,3724 0,381	0,3422 0,343	0,3145 0,323	0,2766 0,290
1,6	0,3332	0,3079	0,2842	0,2512
1,7	0,2994	0,2781	0,2577	0,2289
1,8	0,2702	0,2521	0,2345	0,2093
1,9	0,2449	0,2294	0,2141	0,1920
2,0	0,2229 0,228	0,2095 0,205	0,1962 0,200	0,1766 0,188
2,1	0,2036	0,1920	0,1803	0,1630
2,2	0,1867	0,1765	0,1662	0,1508
2,3	0,1717	0,1628	0,1537	0,1399
2,4	0,1585	0,1506	0,1425	0,1302
2,5	0,1467	0,1397	0,1325	0,1214
2,6	0,1362	0,1299	0,1234	0,1134
2,7	0,1267	0,1211	0,1153	0,1062
2,8	0,1182	0,1132	0,1079	0,0997
2,9	0,1105	0,1060	0,1012	0,0937
3,0	0,1036	0,0994	0,0951	0,0882

\otimes Valori σ_c/f_y secondo CNR 10011/85

In alternativa si può verificare l'asta con la teoria del secondo ordine considerando l'appropriata imperfezione di fraccia iniziale (Fig. 5.5.1).



Sezione trasversale		Metodo di analisi globale	
Metodo usato per la verifica di resistenza	Tipo di sezione ed asse	Elastica o rigido-plastica o elastica-perfettamente-plastica	Elasto-plastica (metodo della zona plastica)
Elastica [5.4.8.2]	Qualsiasi	$\alpha (\bar{\lambda} - 0,2) k_y W_{e\ell} / A$	--
Lineare plastica [5.4.8.1(2)]	Qualsiasi	$\alpha (\bar{\lambda} - 0,2) k_y W_{p\ell} / A$	--
Non lineare plastica [5.4.8.1 da (1) a (11)]	Sezione a l asse yy	$1,33 \alpha (\bar{\lambda} - 0,2) k_y W_{p\ell} / A$	$\alpha (\bar{\lambda} - 0,2) k_y W_{p\ell} / A$
	Sezione a l asse zz	$2,0 k_y e_{eff} / \epsilon$	$k_y e_{eff} / \epsilon$
	Sezione cava rettangolare	$1,33 \alpha (\bar{\lambda} - 0,2) k_y W_{p\ell} / A$	$\alpha (\bar{\lambda} - 0,2) k_y W_{p\ell} / A$
	Sezione cava circolare	$1,5 k_y e_{eff} / \epsilon$	$k_y e_{eff} / \epsilon$

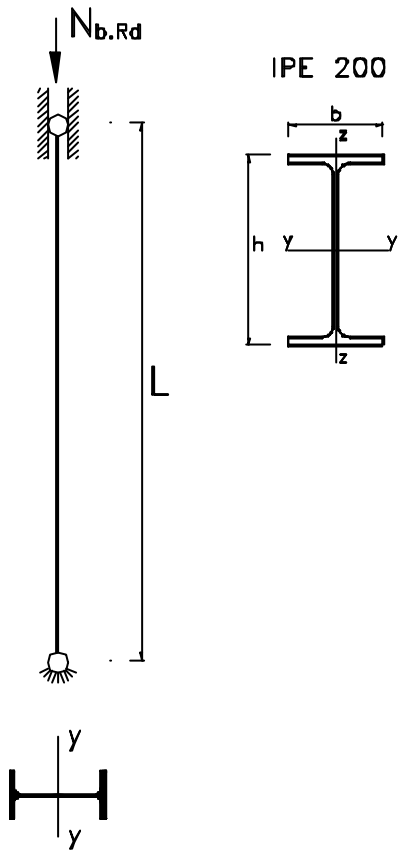
$k_y = (1 - k_\delta) + 2 k_\delta \bar{\lambda}$ con la limitazione $k_y \geq 1,0$

Curva di instabilità	α	e_{eff}	k_δ			
			$\gamma_{M1} = 1,05$	$\gamma_{M1} = 1,10$	$\gamma_{M1} = 1,15$	$\gamma_{M1} = 1,20$
a	0,21	$\ell / 600$	0,12	0,23	0,33	0,42
b	0,34	$\ell / 380$	0,08	0,15	0,22	0,28
c	0,49	$\ell / 270$	0,06	0,11	0,16	0,20
d	0,76	$\ell / 180$	0,04	0,08	0,11	0,14

Membrature a sezione variabile:

Usare il valore di $W_{e\ell} / A$ o $W_{p\ell} / A$ al centro della lunghezza di libera inflessione ℓ .

ESEMPIO 1 [EC3 #5.5.1]:



Determinare il valore massimo del carico di progetto per l'instabilità nel piano del disegno (inflexione attorno all'asse y-y).

Acciaio Fe360 $f_y=235\text{N/mm}^2$

IPE 200 $A=2850\text{mm}^2$

$W_{el}=1.94 \cdot 10^5 \text{ mm}^3$ $i_y=82.6\text{mm}$

$b=100\text{mm}$ $h=200\text{mm}$ $t_f=8.5\text{mm}<40\text{mm}$

\Rightarrow curva d'instabilità a) [EC3 prospetto 5.5.3]

$L=7756\text{mm}$

$$\lambda = \frac{L}{i_y} = 93.9$$

$$\lambda_1 = \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{f_y}} = 93.9 \cdot \varepsilon = 93.9$$

$$\text{con } \varepsilon = \sqrt{\frac{235}{f_y}} = 1$$

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_1} = 1$$

$$N_{b,Rd} = \frac{\chi \cdot A \cdot f_y}{\gamma_{M1}} = 405.26 \text{ kN} \quad [5.45] \text{ per sezioni di classe 1,2 e3}$$

Essendo $\chi = \frac{1}{\phi + [\phi^2 - \bar{\lambda}^2]^{0.5}} = 0.6656$ [5.46]

$$\phi = 0,5[1 + \alpha(\bar{\lambda} - 0,2) + \bar{\lambda}^2] = 1.084$$

$\alpha=0.21$

coeff. di imperfezione [prospetto 5.5.1]

$\gamma_{M1}=1.10$

coeff. di sicurezza per l'instabilità

Calcolo con l'analisi del 2° ordine [EC3 fig.5.5.1]

L'analisi del secondo ordine di una membratura deve considerare l'appropriata imperfezione di freccia iniziale equivalente fornita dalla figura 5.5.1 in corrispondenza della pertinente curva d'instabilità, dipendente dal metodo di analisi e dal tipo di verifica della sezione trasversale.

Usiamo il metodo di verifica elastica (W_{el}) e l'analisi globale elastica.

Il valore di progetto dell'imperfezione di freccia iniziale equivalente risulta:

$$e_{0,d} = \alpha \cdot (\bar{\lambda} - 0.2) \cdot k_{\gamma} \cdot W_{el} / A = 14.07 \text{ mm}$$

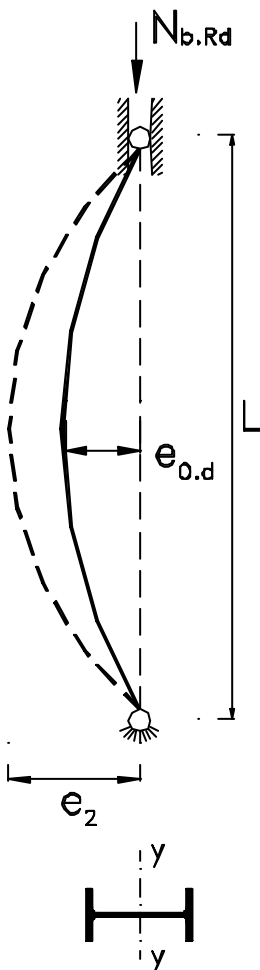
dove: $\alpha=0.21$ curva d'instabilità a)

$$k_{\gamma} = (1 - k_{\delta}) + 2 \cdot k_{\delta} \cdot \bar{\lambda} = 1.23 \geq 1$$

$$k_{\delta} = 0.23 \quad \text{per } \gamma_{M1} = 1.10$$

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_1} = 1$$

E' utile ricordare che $e_{0,d} \cdot A / W_{el}$ è il parametro di imperfezione η indicato ad esempio da Young (v. Ballio pag.461).



Il carico $N_{b,Rd}$ incrementa la freccia iniziale $e_{0,d}$ che diviene e_2 . Possiamo calcolare e_2 con la formula approssimata:

$$e_2 = \frac{e_{0,d}}{1 - \frac{N_{b,Rd}}{N_E}} \quad \text{con } N_{b,Rd}=405.26 \text{ kN}$$

$$N_E = \frac{p^2 \cdot E \cdot A}{I^2} = \frac{p^2 \cdot 210000 \cdot 2850}{93.9^2} = 669.9 \text{ kN}$$

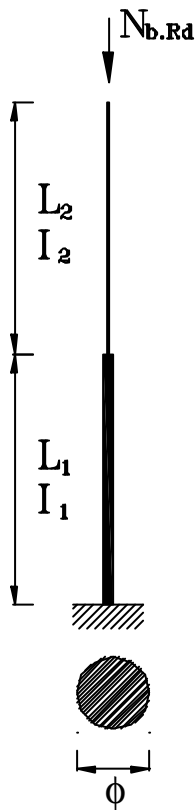
$$e_2 = \frac{14.07}{0.3951} = 35.61 \text{ mm}$$

La sezione di mezzeria va verificata a pressoflessione

$$\begin{aligned} s &= \frac{N}{A} + \frac{N \cdot e_2}{W_{el}} = 405.26 \cdot \left(\frac{1}{2850} + \frac{35.61}{194000} \right) = \\ &= 142.2 + 74.4 = 217 \text{ N/mm}^2 \cong f_y / g_{M1} = 214 \end{aligned}$$

ESEMPIO 2: asta a sezione variabile [EC3 #5.5.1.3]

Le membrature a sezione variabile possono essere analizzate usando l'analisi del secondo ordine.



$$\phi_1=40 \text{ mm} \quad A_1=1257 \text{ mm}^2 \quad I_1 = \frac{P \cdot f_1^4}{64} = 125663 \text{ mm}^4 \quad i_1=10 \text{ mm}$$

$$\phi_2=33.64 \text{ mm} \quad A_2=888 \text{ mm}^2 \quad I_2 = \frac{P \cdot f_2^4}{64} = 62832 \text{ mm}^4 = I_1 / 2 \quad i_2=8.41 \text{ mm}$$

$$L_1=L_2=572 \text{ mm}$$

Le lunghezze di libera inflessione delle due aste (vedi Caironi es.4 pag. 62) e le rispettivi snellezze sono:

$$L_{01} = \beta_1 \cdot L_1 = 4.37 \cdot 572 = 2500 \text{ mm} \quad l_1 = \frac{L_{01}}{i_1} = 250 \quad \bar{l}_1 = 2.662$$

$$L_{02} = \beta_2 \cdot L_2 = 3.09 \cdot 572 = 1767 \text{ mm} \quad l_2 = \frac{L_{02}}{i_2} = 210 \quad \bar{l}_2 = 2.236$$

Il valore del carico critico euleriano può essere calcolato sia a partire dall'asta inferiore che dall'asta superiore:

$$N_{cr} = \frac{P^2 EI_1}{L_{01}^2} = \frac{P^2 EI_2}{L_{02}^2} = 41700 \text{ N} \quad s_{cr,1} = 33.2 \quad s_{cr,2} = 47.0 \text{ N/mm}^2$$

Le snellezze adimensionali possono essere calcolate anche dalle tensioni critiche:

$$\bar{l}_1 = \sqrt{\frac{f_y}{s_{cr,1}}} = 2.662 \quad \bar{l}_2 = \sqrt{\frac{f_y}{s_{cr,2}}} = 2.236$$

A) Resistenza di progetto all'instabilità secondo EC3 #5.5.1.1

La resistenza di progetto all'instabilità può essere calcolata a partire da entrambe le aste, cioè l'asta a sezione variabile può essere considerata equivalente ad un'asta a sezione costante avente la sezione dell'asta inferiore e la snellezza λ_1 , oppure la sezione dell'asta superiore e la snellezza λ_2 . Il metodo viene definito metodo della "snellezza equivalente".

Poiché per le aste reali non vale la formula di Eulero, si avranno due risultati diversi e si dovrà usare il valore più cautelativo. Poiché le snellezze sono elevate (>200) la differenza sarà modesta.

Si deve utilizzare la curva d'instabilità c). Si ottiene:

	\bar{I}	χ	$N_{b,Rd}$ [N]
Asta 1	2.662	0.118	31725
Asta 2	2.236	0.161	30484
		Δ	4%

La resistenza all'instabilità dell'asta a sezione variabile è quindi:

$$N_{b,Rd} = 30.48 \text{ kN}$$

B) Resistenza di progetto all'instabilità utilizzando l'analisi del secondo ordine [EC3 fig 5.5.1]

Anche l'impiego dell'analisi del secondo ordine richiede la conoscenza della snellezza dell'asta a sezione variabile per determinare il valore di progetto dell'imperfezione di freccia iniziale equivalente $e_{0,d}$. La verifica può essere eseguita facendo riferimento sia all'asta inferiore che all'asta superiore ed dà risultati praticamente coincidenti con quelli che si ottengono col metodo precedente.

Appare però più logico calcolare l'imperfezione di freccia iniziale facendo riferimento all'asta inferiore che ha la lunghezza di libera maggiore e nella quale si ha il valore massimo del momento del secondo ordine.

Si impiega un metodo di verifica elastica (W_{el}), l'analisi globale elastica e la curva d'instabilità c).

Il valore di progetto dell'imperfezione di freccia iniziale equivalente è:

$$e_{0,d} = \alpha \cdot (\bar{I} - 0.2) \cdot k_d \cdot W_{el} / A = 8.90 \text{ mm}$$

dove: $\alpha = 0.49$ $k_d = 0.11$ $\bar{I} = 2.662$ $W_{el} / A = 4.999$

$$k_g = (1 - k_d) + 2 \cdot k_d \cdot \bar{I} = 1.476 \geq 1$$

Il carico $N_{b,Rd} = 30484$ determinato sopra incrementa la freccia iniziale $e_{0,d}$ che diviene e_2 , calcolabile con la formula approssimata:

$$e_2 = \frac{e_{0,d}}{1 - \frac{N_{b,Rd}}{N_{cr}}} = \frac{8.90}{1 - \frac{30484}{41700}} = 33.1 \text{ mm}$$

La verifica a pressoflessione fornisce:

$$\sigma = \frac{N_{b,Rd}}{A} + \frac{N_{b,Rd} \cdot e_2}{W_{el}} = \frac{30484}{1257} + \frac{30484 \cdot 33.1}{6283} = 24.25 + 160.6 = 184.8 < \frac{f_y}{\gamma_{M1}} = 213.6 \text{ N/mm}^2$$

La verifica è ampiamente soddisfatta. Il carico può crescere fino al valore ottenuto con il metodo precedente per l'asta 1 ($N=31725$). I due metodi sono quindi equivalenti.

Si deve però osservare che applicando la teoria del secondo ordine si possono risolvere anche casi nei quali è difficile considerare una snellezza equivalente.

Ad esempio, nel caso di asta con sezione variabile con continuità, l'asta può essere verificata con la teoria del secondo ordine adottando un'imperfezione di freccia iniziale $e_{0,d}$ ragionevolmente a favore di stabilità

FLESSIONE E COMPRESSIONE ASSIALE NORMATIVA ITALIANA

La normativa italiana (CNR 10011) adotta per il metodo delle tensioni ammissibili la formula di interazione:

$$w \frac{N}{A} + \frac{M_{eq}}{W \left(1 - n \frac{N}{N_{cr}} \right)} \leq s_{adm}$$

nella quale:

v è il coefficiente di sicurezza (1.5)

M_{eq} è il momento equivalente da calcolare nel modo seguente:

$M_{eq} = M$ per momento costante

$M_{eq} = 1.3 M_m$ con la limitazione $0.75 M_{max} < M_{eq} < M_{max}$ essendo M_m il momento medio lungo l'asta e M_{max} il momento massimo.

Nel caso di asta soggetta ai soli momenti di estremità (fig. 1) si assume

$M_{eq} = 0.6 M_a - 0.4 M_b > 0.4 M_a$ con $|M_a| > |M_b|$

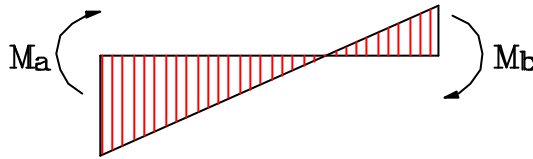


Fig 1

Dividiamo ambo i membri per σ_{adm} :

$$\frac{N}{s_{adm} A} + \frac{M_{eq}}{s_{adm} W \left(1 - n \frac{N}{N_{cr}} \right)} \leq 1$$

Moltiplichiamo e dividiamo per il coefficiente di sicurezza v :

$$\frac{n N}{n s_{adm} A} + \frac{\frac{n M_{eq}}{1 - n N / N_{cr}}}{n s_{adm} W} \leq 1$$

Usando i simboli dell'eurocodice si può scrivere:

$$\frac{N_{Sd}}{N_{b,Rd}} + \frac{\frac{M_{eq,Sd}}{1 - N_{Sd} / N_{cr}}}{M_{c,Rd}} = \frac{N_{Sd}}{N_{b,Rd}} + \frac{M_{eq,Sd}^{2.ord.}}{M_{c,Rd}} \leq 1$$

Con il simbolo $M_{eq,Sd}^{2.ord.}$ si è indicato il momento equivalente del secondo ordine.

EUROCODICE [EC3 #5.5.4]

L'Eurocodice introduce la seguente formula, valida per sezioni trasversali di classe 1 e 2, per verificare una membratura soggetta all'azione combinata di momento flettente e azione assiale:

$$\frac{N_{sd}}{N_{b,Rd}} + k \frac{M_{sd}}{M_{c,Rd}} \leq 1 \quad [5.51]$$

in cui
$$N_{b,Rd} = \frac{\chi_{min} \cdot A \cdot f_y}{\gamma_{M1}}$$

$$M_{c,Rd} = \frac{W_{pl} \cdot f_y}{\gamma_{M0}}$$

$$k = 1 - \frac{\mu \cdot N_{sd}}{\gamma_{M1} \cdot N_{b,Rd}} \quad \text{con la limitazione } k \leq 1,5$$

Il coefficiente k, oltre ad essere un termine di amplificazione del momento del primo ordine M_{sd} come $1/(1-N/N_{cr})$ per la normativa italiana, congloba anche la trasformazione dal valore del momento esterno M_{Sd} (variabile lungo l'asta) al valore del momento equivalente M_{eq} .

Si può osservare che a favore di sicurezza si può adottare sempre $k=1.5$. A prima vista sembra che k sia <1 e che diminuisca all'aumentare di N. Si capisce poi che $\mu < 0$. Infatti:

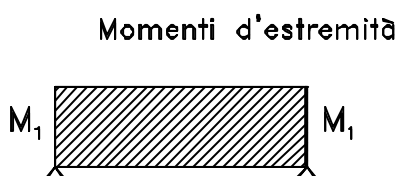
$$\mu = \bar{\lambda}(2\beta_M - 4) + \left[\frac{W_{pl} - W_{el}}{W_{el}} \right] \quad \text{con la limitazione } \mu \leq 0,9 \text{ e con } \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_1}$$

Supponiamo, per semplicità e a favore di sicurezza, di fare la verifica con W_{el} e quindi di considerare $W_{el}=W_{pl}$. Si ha in tal caso:

$$\mu = \bar{\lambda}(2\beta_M - 4)$$

dove: β_M coeff. di momento equivalente uniforme per l'instabilità flessionale [EC3 fig 5.5.3],
dipende dalla distribuzione del momento lungo l'asta.

Esaminando il caso di momento costante:

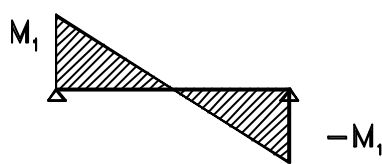


$$\begin{aligned} \Psi = 1 & \Rightarrow \beta_{M,\Psi} = 1.8 - 0.7 \cdot \Psi = 1.1 \\ M_1 = M_{sd} & \Rightarrow \mu = \bar{\lambda}(2\beta_M - 4) = -1.8 \cdot \bar{\lambda} \\ \Psi = 1 & \\ \beta^M = 1.1 & \end{aligned}$$

Il valore è maggiore di 1 e quindi dà luogo ad un valore di k inferiore a quello che si avrebbe con $\beta_M = 1$. Quindi k risulta maggiore dell'unità

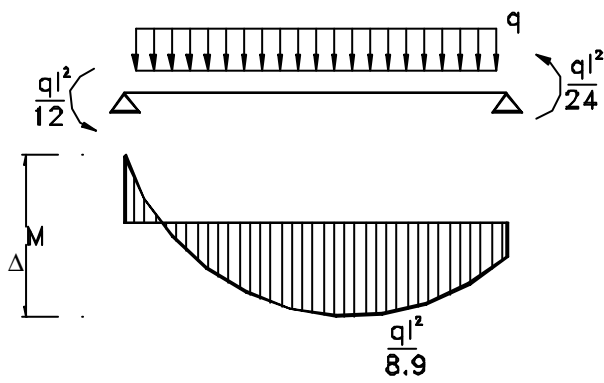
$$k = 1 + \frac{1.8 \cdot N_{Sd}}{1.1 \cdot N_{b,Rd}} \cdot \bar{\lambda} \leq 1.5$$

Nel caso di diagramma incrociato:

Momenti d'estremità	$\Rightarrow \beta_{M,\Psi} = 1.8 - 0.7 \cdot \Psi = 2.5$
	$\Rightarrow m = \bar{I}(2b_M - 4) = \bar{I} \quad \text{con} \quad m \leq 0.9$
$\Psi = -1$	$k = 1 - \frac{0.9 \cdot N_{Sd}}{1.1 \cdot N_{b,Rd}} \cdot \bar{\lambda} \leq 1.5$
$\beta_m = 2.5$	

In questo caso k diminuisce all'aumentare di N. Si noti però che l'effetto amplificativo del secondo ordine avviene lontano dai vincoli dove il momento è minore.

Esempio con momenti d'estremità e carico laterale nel piano

	$M_Q = \frac{q \cdot l^2}{8}$ mom. del carico laterale
	$\Delta M = \frac{q \cdot l^2}{12} + \frac{q \cdot l^2}{8.9} = \frac{q \cdot l^2}{5.1}$
	$\Psi = -0.5$
	$\beta_{M,\Psi} = 1.8 - 0.7 \cdot \Psi = 2.15$
	$\beta_{M,Q} = 1.3$
	$\frac{M_Q}{\Delta M} = 0.64$

Il coefficiente di momento equivalente uniforme risulta:

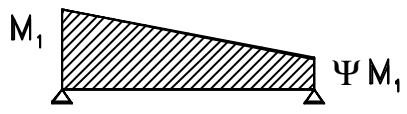
$$\beta_M = \beta_{M,\Psi} + \frac{M_Q}{\Delta M} (\beta_{M,Q} - \beta_{M,\Psi}) = 2.15 + 0.64(1.3 - 2.15) = 1.61$$

$$\mu = (2\beta_M - 4) \cdot \bar{\lambda} = (2.61 - 4) \cdot \bar{\lambda} = -0.78 \cdot \bar{\lambda}$$

$$k = 1 - \frac{\mu \cdot N_{Sd}}{\gamma_{M1} \cdot N_{b,Rd}} = 1 + \frac{0.78 \cdot N_{Sd}}{1.1 \cdot N_{b,Rd}} \cdot \bar{\lambda} \leq 1.5$$

EC3 Fig. 5.5.3: Coefficienti di momento equivalente uniforme

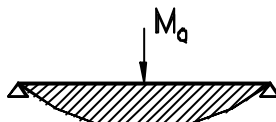
Momenti d'estremità



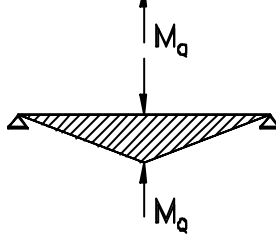
$$\beta_{M,\psi} = 1.8 - 1.1 \cdot \psi$$

$$-1 \leq \psi \leq 1$$

Momenti dovuti a carichi laterali nel piano



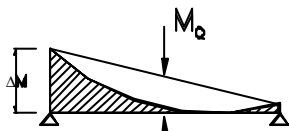
$$\beta_{M,q} = 1.3$$

$$\mu = -1.4 \bar{\lambda} \quad k = 1 + \frac{1.4}{1.1} \frac{N_{Sd}}{N_{b,Rd}} \cdot \bar{\lambda}$$


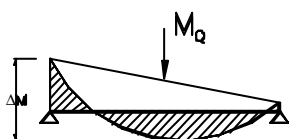
$$\beta_{M,q} = 1.4$$

$$\mu = -1.2 \bar{\lambda} \quad k = 1 + \frac{1.2}{1.1} \frac{N_{Sd}}{N_{b,Rd}} \cdot \bar{\lambda}$$

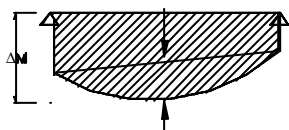
Momenti dovuti a carichi laterali nel piano
più momenti d'estremità



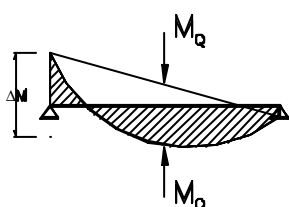
$$\beta_M = \beta_{M,\psi} + \frac{M_Q}{\Delta M} (\beta_{M,Q} - \beta_{M,\psi})$$



$$M_Q = |\max M| \quad \text{dovuto al solo carico laterale}$$



$$\Delta M = \begin{cases} |\max M| & \text{per diagramma del momento} \\ & \text{senza cambio di segno} \end{cases}$$



$$\Delta M = \begin{cases} |\max M| + |\min M| & \text{per diagramma del momento} \\ & \text{con cambio di segno} \end{cases}$$

Esempio:



Determinare il valore massimo del momento sollecitante posto $N_{sd} = N_{b,Rd}/2$

Acciaio Fe360 $f_y = 235 \text{ N/mm}^2$
 IPE 200 $A = 2850 \text{ mm}^2$ $W_{el} = 1.94 \cdot 10^5 \text{ mm}^3$ $W_{pl} = 2.206 \cdot 10^5 \text{ mm}^3$
 $i_y = 82.6 \text{ mm}$
 $b = 100 \text{ mm}$ $h = 200 \text{ mm}$ $t_f = 8.5 \text{ mm} < 40 \text{ mm} \Rightarrow$ curva d'instabilità a)
 [EC3 prospetto 5.5.3]

$L = 7756 \text{ mm}$

$$\lambda = \frac{L}{i_y} = 93.9 \quad \lambda_1 = \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{f_y}} = 93.9 \cdot \epsilon = 1$$

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_1} = 1 \quad \text{con } \epsilon = \sqrt{\frac{235}{f_y}} = 1$$

$$N_{b,Rd} = \frac{\chi \cdot A \cdot f_y}{\gamma_{M1}} = 405.26 \text{ kN} \quad \text{con } c = 0.6656 \quad (\text{vedi es. precedente})$$

In presenza di flessione deve essere [EC3 5.5.4]:

$$\frac{N_{sd}}{N_{b,Rd}} + k \frac{M_{sd}}{M_{c,Rd}} \leq 1 \quad [5.51]$$

con $M_{c,Rd} = \frac{W_{pl} \cdot f_y}{\gamma_{M1}} = 47.128 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$

Il coefficiente di momento equivalente uniforme vale:

$$\beta_{M,\Psi} = 1.8 - 0.7 \cdot \Psi = 1.1 \quad \text{essendo } \Psi = 1$$

Quindi:

$$\mu_y = \bar{\lambda} \cdot (2\beta_M - 4) + \frac{W_{pl} - W_{el}}{W_{el}} = 1 \cdot (2.2 - 4) + \frac{220.6 - 194.3}{194.3} = -1.8 + 0.135 = -1.665 < 0.9$$

$$k_y = 1 - \frac{\mu_y \cdot N_{sd}}{\gamma_{M1} \cdot N_{b,Rd}} = 1 + \frac{1.665}{1.1} \cdot 0.5 = 1.757 \leq 1.5 \Rightarrow k_y = 1.5$$

La [5.51] diviene quindi:

$$\frac{N_{sd}}{N_{b,Rd}} + k \frac{M_{sd}}{M_{c,Rd}} = \frac{1}{2} + 1.5 \cdot \frac{M_{sd}}{M_{c,Rd}} \leq 1$$

$$M_{sd} \leq 0.5 \cdot \frac{M_{c,Rd}}{1.5} = 0.333 \cdot M_{c,Rd} = 15.709 \text{ kNm}$$

L'esercizio può essere svolto anche con la teoria del secondo ordine calcolando l'imperfezione geometrica equivalente:

$$e_{0,d} = \alpha \cdot (\bar{\lambda} - 0.2) \cdot k_\gamma \cdot W_{el} / A = 14.07 \text{ mm} \quad (\text{vedi es. precedente})$$

La freccia del primo ordine vale provocata da M_{Sd} vale:

$$f_0 = \frac{M_{Sd} \cdot L^2}{8 \cdot EJ} = 28.95 \text{ mm}$$

La freccia totale del primo ordine vale quindi:

$$e_1 = e_{0,d} + f_0 = 43.02 \text{ mm}$$

La freccia del 2° ordine, usando la formula approssimata, vale:

$$e_2 = \frac{e_1}{1 - \frac{N_{Sd}}{N_E}} = 61.67 \text{ mm}$$

con
$$N_E = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot A}{\lambda^2} = 669.935 \text{ kN}$$

$$N_{Sd} = \frac{N_{b,Rd}}{2} = 202.63 \text{ kN}$$

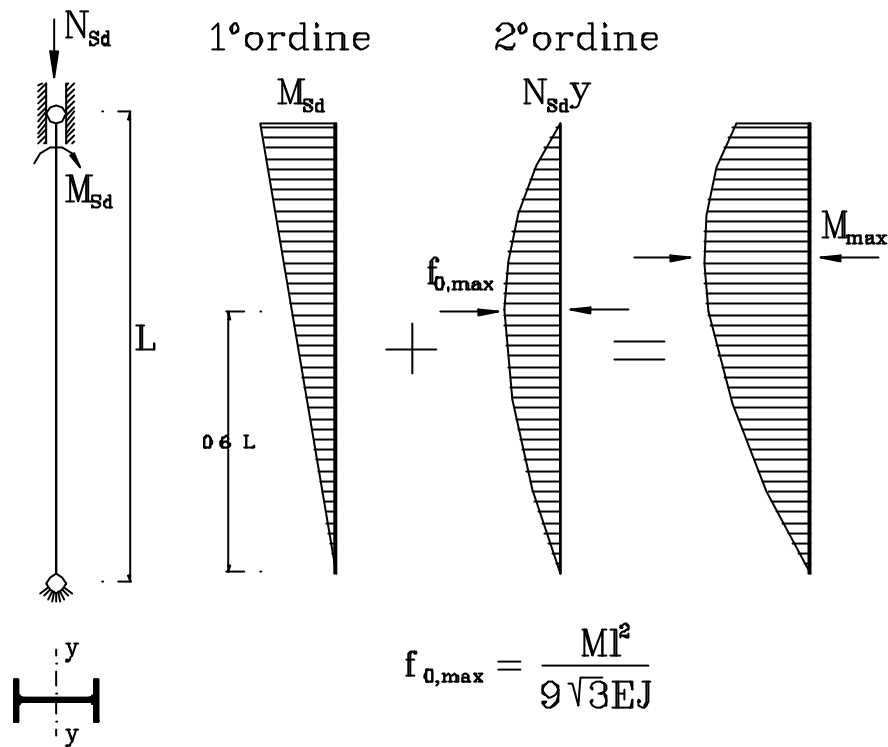
Il momento in mezzzeria vale:

$$M_2 = M_{Sd} + N_{Sd} \cdot e_2 = 15.709 \cdot 10^6 + 202630 \cdot 61.67 = 28.206 \text{ kNm}$$

La tensione di compressione massima vale:

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{Sd}}{A} + \frac{M_2}{W_{el}} = 71.1 + 145.2 = 216.3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cong \frac{f_y}{\gamma_{M1}} 213.6 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Esempio:



Determinare il valore massimo del momento sollecitante posto $N_{sd}=N_{b,Rd}/2$.

Acciaio Fe360 $f_y=235 \text{ N/mm}^2$, IPE 200, $L=7756\text{mm}$

Come nell'esercizio precedente risulta:

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_1} = 1$$

$$N_{b,Rd} = \frac{\chi \cdot A \cdot f_y}{\gamma_{M1}} = 405.26\text{kN} \quad \text{con} \quad \chi = 0.6656 \quad (\text{vedi es. precedente})$$

In presenza di flessione deve essere [EC3 #5.5.4]:

$$\frac{N_{sd}}{N_{b,Rd}} + k \frac{M_{sd}}{M_{c,Rd}} \leq 1 \quad [5.51]$$

con $M_{c,Rd} = \frac{W_{pl} \cdot f_y}{\gamma_{M1}} = 47.128 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$

Il coefficiente di momento equivalente uniforme vale:

$$\beta_{M,\Psi} = 1.8 - 0.7 \cdot \Psi = 1.8 \quad \text{essendo} \quad \Psi=0$$

Quindi:

$$\mu_y = \bar{\lambda} \cdot (2\beta_M - 4) + \frac{W_{pl} - W_{el}}{W_{el}} = (2 \cdot 1.8 - 4) + \frac{220.6 - 194.3}{194.3} = -0.2646 < 0.9$$

$$k_y = 1 - \frac{\mu_y \cdot N_{Sd}}{\gamma_{M1} \cdot N_{b,Rd}} = 1 + \frac{0.2646}{1.1} \cdot 0.5 = 1.1203 \leq 1.5 \quad \Rightarrow \quad k_y = 1.5$$

La [5.51] diviene quindi:

$$\frac{N_{sd}}{N_{b,Rd}} + k \frac{M_{sd}}{M_{c,Rd}} = \frac{1}{2} + 1.12 \cdot \frac{M_{sd}}{M_{c,Rd}} \leq 1$$

$$M_{Sd} \leq 0.5 \cdot \frac{M_{c,Rd}}{1.12} = 0.4463 \cdot M_{c,Rd} = 21.033 \text{ kNm}$$

Svolgendo l'esercizio con la teoria del 2° ordine e con l'imperfezione geometrica equivalente:

$$e_{0,d} = \alpha \cdot (\bar{\lambda} - 0.2) \cdot k_\gamma \cdot W_{el} / A = 14.07 \text{ mm} \quad (\text{vedi es. precedente})$$

La freccia del primo ordine vale provocata da M_{Sd} vale:

$$f_0 = \frac{M_{Sd} \cdot L^2}{9 \cdot \sqrt{3} \cdot EJ} = 19.89 \text{ mm}$$

In questo esercizio non è immediato calcolare il momento del 2° ordine, a differenza dell'esercizio precedente in cui il momento del primo ordine e la freccia massima si verificano nella stessa sezione. In questo caso il momento massimo del 2° ordine può trovarsi in un punto qualsiasi dell'asta compreso tra l'estremità superiore e il l'ascissa di freccia massima. La verifica della membratura dovrà condursi nella sezione in cui si ha il massimo momento del 2° ordine. Poiché la freccia massima del primo ordine si ha nella sezione a distanza $\cong L \cdot \sqrt{3} = 0.6 \cdot L$ dall'estremo inferiore, il massimo effetto del secondo ordine, in presenza di un elevato P, si manifesterà in un punto vicino a tale sezione (vedi Caironi pag.160).

Il momento del 2° ordine dipende dall'entità dell'azione assiale, infatti (utilizzando l'espressione approssimata):

$$M^2(x) = M^1(x) + N \cdot y^2(x) = \frac{M}{L} x + N \cdot \frac{[y^1(x) + e_{0d}(x)]}{\left(1 - \frac{N}{N_E}\right)}$$

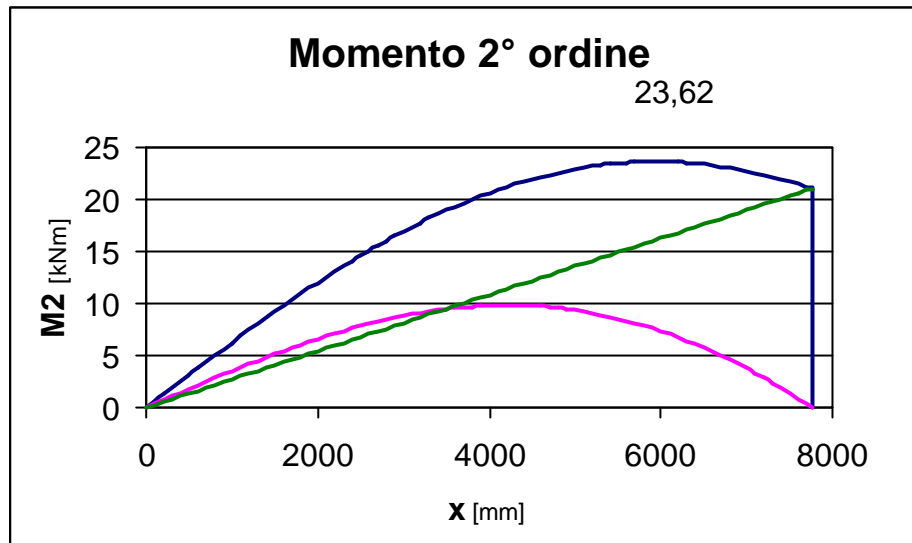
essendo

$y^1(x)$ la freccia elastica del primo ordine

$e_{0d}(x) = e_{0d} \cdot \text{sen}\left(\pi \cdot \frac{x}{L}\right)$ imperfezione geometrica (massima in mezzeria e pari a e_{0d})

e non si può affermare a priori la posizione del massimo. In questo esempio la funzione M^2 ha il massimo a 5900mm dall'estremo inferiore ed è pari a 23.62 kNm.

Nel diagramma si riporta l'andamento del momento del 2° ordine.

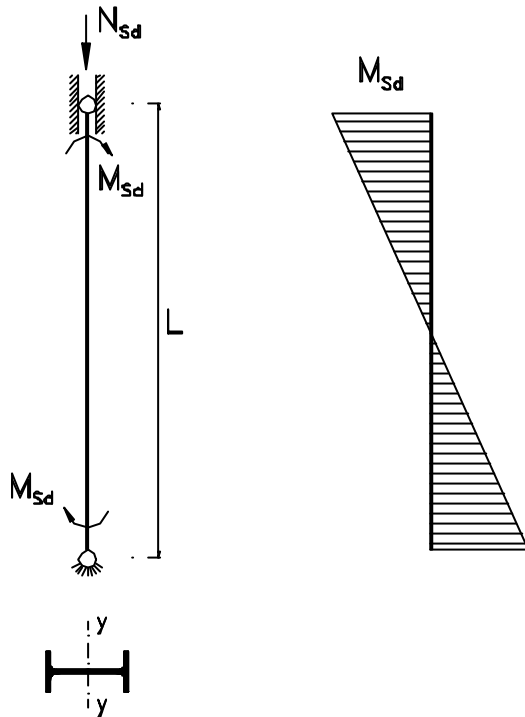


Per cui la verifica della sezione risulta:

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{sd}}{A} + \frac{M_2}{W_{el}} = 71.1 + 122 = 193 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cong \frac{f_y}{\gamma_{M1}} 213.6 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Anche in questo caso siamo vicini allo snervamento del materiale.

Esempio:



Determinare il valore massimo del momento sollecitante posto

$$N_{sd} = N_{b,Rd} / 2$$

Acciaio Fe360 $f_y = 235 \text{ N/mm}^2$

IPE 200

$$L = 7756 \text{ mm}$$

Il coefficiente di momento equivalente uniforme vale:

$$\beta_{M,\Psi} = 1.8 - 0.7 \cdot \Psi = 2.5 \quad \text{essendo } \Psi = -1$$

Quindi:

$$\mu_y = \bar{\lambda} \cdot (2\beta_M - 4) + \frac{W_{pl} - W_{el}}{W_{el}} = (2 \cdot 2.5 - 4) + \frac{220.6 - 194.3}{194.3} = 1.13 < 0.9 \Rightarrow \mu_y = 0.9$$

$$k_y = 1 - \frac{\mu_y \cdot N_{sd}}{\gamma_{M1} \cdot N_{b,Rd}} = 1 - \frac{0.9}{1.1} \cdot 0.5 = 0.59 \leq 1.5$$

La [5.51] diviene quindi:

$$\frac{N_{sd}}{N_{b,Rd}} + k \frac{M_{sd}}{M_{c,Rd}} = \frac{1}{2} + 0.6 \cdot \frac{M_{sd}}{M_{c,Rd}} \leq 1$$

$$M_{sd} \leq 0.5 \cdot \frac{M_{c,Rd}}{0.6} = 0.833 \cdot M_{c,Rd} = 39.25 \cdot \text{kNm}$$